

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



1 Механика

1.1 Место механики в физике

В теоретической физике само существование тех или иных «законов» может возникать лишь в определенном приближении. Характерным примером этой ситуации может служить классическая механика.

1. Классическая механика возникла из обобщения тех сведений о движении материальных тел, которые можно было почерпнуть из нашего повседневного опыта. При этом в результате многовековых стараний пришли к тому выводу, что при построении законов механики следует абстрагироваться от некоторого круга явлений, играющих в повседневном опыте весьма существенную роль, — именно, от явлений, связанных с трением, — или, во всяком случае, отказаться от описания их механизма и точных законов.
2. К концу прошлого века в результате создания кинетической теории этому обстоятельству возникло то объяснение, что «на самом деле» законы механики в точности применимы только к микрочастицам, из которых построены все материальные тела, — к молекулам и атомам. Применимость же — приближенная — механики к поведению «больших» тел не прямая, а опосредствованная. Она возникает лишь за счет статистического усреднения, причем и сами динамические величины для макроскопических тел — координаты, импульсы, энергия — не есть собственно динамические переменные, а лишь некоторые средние значения (полученные в результате усреднения по микроскопическим движениям) некоторых настоящих динамических переменных. Сама же точность, с которой выполняются макроскопические уравнения движения, есть лишь следствие громадного числа молекул во всяком макроскопическом теле, почему флуктуации — отклонения от средних — оказываются поразительно малыми.

Таким образом, для макроскопической механики ее законы возникают способом, для которого Э. Шредингер предложил очень меткое название «порядок из беспорядка», и при достаточном увеличении точности измерений перестают выполняться (известным примером служит броуновое движение). Что же касается сил трения, то нам приходится отказаться от их описания или вводить их извне как некий чужеродный механике объект.

3. Однако полная парадоксальность ситуации проявилась лишь в XX веке, когда выяснилось, что как раз для составляющих большие тела микрочастиц классическая механика в большинстве случаев **вообще неприменима**, что их движения управляются совсем другими законами, законами **квантовой механики**. Кроме того, при больших скоростях вступают в силу изменения, связанные с **теорией относительности**. Таким образом, строго говоря, классическая

механика **вовсе не имеет области применимости.**

Она оказывается как раз такой теорией, само существование которой обязано лишь приближенности описания.

Зачем же изучать классическую механику?

Не стоит повторять того, что хотя и нет никакой области явлений, точно описываемой классической механикой, есть очень обширные области, описываемые ею в очень хорошем приближении.

Не менее существенно другое обстоятельство. Именно в классической механике были очень подробно развиты чрезвычайно удобные общие математические методы, которые достигли такого совершенства, что именно «по их образу и подобию» строятся сейчас почти все физические теории¹. Поэтому знакомство с теоретической физикой приходится начинать с методов аналитической механики, однако основы ее мы будем излагать не с математической, а с физической точки зрения, и во главу угла мы будем все время ставить не строгость доказательств, а связи с нашими физическими представлениями о природе.

1.2 Основные понятия механики

1. Понятия пространства и времени относятся к основным понятиям теоретической физики. Введение этих понятий, как и любых физических понятий, должно опираться на данные опыта, основываться на некоторой процедуре, позволяющей сопоставлять соответствующим понятиям физическим величинам определенные числа, получаемые в результате измерений.

(а) Не существует, однако, опытов, которые позволяли бы измерить положение тела в пространстве или момент времени, когда происходит некоторое событие, — экспериментально

¹Более двух с половиной веков, от времен Ньютона до конца прошлого столетия, механика рассматривалась как прямая и единственная основа всей физики. Под словами понять или объяснить какое-либо физическое явление имели в виду построение его механической модели, причем выражение «модель» понималось буквально, в смысле какой-либо реальной конструкции из предметов, подчиняющихся законам классической механики. Так для объяснения распространения световых волн была придумана специальная заполняющая все пространство упругая среда — «мировой эфир», — в котором световые колебания распространялись так же, как звук в твердых телах. Создатель современной электродинамики Максвелл потратил немало сил на попытки так "оборудовать" эту среду, чтобы она описывалась бы выведенными им уравнениями: дело доходило до напоминающих часовой механизм моделей с колесами и зубчатыми передачами. Только к концу прошлого века физикам пришлось примириться с тем, что новые области физических явлений — тогда в первую очередь шла речь об электродинамике — принципиально несводимы к механике. В связи с этим место реальных механических моделей начали занимать в физике модели математические, от которых уже требовалось не конструктивное тождество с объектом, а только математически аналогичное описание - и что же, в качестве материала для построения таких моделей мы опять используем механические уравнения!

мы можем измерять только расстояния между телами или промежутки времени между событиями.

Таким образом, чтобы сопоставлять пространству и времени какие-либо физические величины, мы должны выбрать некоторое тело в качестве начала отсчета расстояний и некоторый момент в качестве начала отсчета промежутков времени.

- (b) Для измерения расстояний пользуются масштабами — т.е. сравнивают измеряемое расстояние с размерами некоторого тела — масштаба, — принимаемого за эталон.

Для измерения времени пользуются часами. Часами может служить любой периодический процесс, т. е. такой процесс, в котором многократно повторяется одно и то же состояние.

Какими соображениями надо руководствоваться при выборе каких-либо масштабов и часов в качестве эталонов длины и времени? Единственным решающим доводом служит тут требование воспроизводимости: если мы рассмотрим какую-то большую группу масштабов (или часов) и будем многократно сравнивать все их друг с другом, то среди этой группы начнет выделяться подгруппа, повторные сравнения внутри которой приводят к наименьшим расхождениям — какой-либо из членов этой подгруппы и будет рационально принять за эталон. Если в последующих сравнениях (в которых могут участвовать и масштабы (часы), не входившие в первоначальную группу) выделится более узкая (а может быть — другая) подгруппа, дающая лучшую воспроизводимость, то естественно перейти к новому эталону.

Именно таким образом шел процесс отбора «наилучших» эталонов длины и времени в реальной истории науки. При этом долгое время в качестве наилучших эталонов длины служили специальным образом подобранные твердые тела макроскопических размеров, а в качестве наилучших часов - астрономические периодические процессы - вращение планет и их обращение вокруг Солнца. В последнее время в связи с успехами микрофизики обнаружилось, что эталоны лучшего качества можно найти среди атомных процессов, — сейчас за международный эталон принимают длину волны в вакууме определенной спектральной линии².

²Тут стоит отметить два любопытных момента: с одной стороны, примечательно, что в качестве эталона длины выбран не предмет, а процесс (колебаний электрона в атоме) — в соответствии со сказанным непосредственно он осуществляет эталон не длины, а времени. Эталон длины получается отсюда опосредствованным образом, умножением на фундаментальную постоянную природы — скорость света в вакууме; с другой стороны, однако, используя этот эталон косвенным образом для измерения длины, мы, на современном уровне техники, не можем использовать его прямым путем в качестве эталона времени - трудность лежит просто в том, что хотя мы сейчас можем практически сосчитать, сколько световых волн приходится, скажем, на метр, мы не умеем сосчитать, сколько колебаний атомной системы происходит в секунду. Обратному же пересчету длины световой волны в частоту колебаний мешает то, что

(с) Опыт показывает, что для того, чтобы определить положение одного тела относительно другого, надо произвести с помощью некоторого масштаба **три** независимых измерения. Таким образом наше пространство **трехмерно**. Дальнейшее сопоставление опытных фактов, относящихся к измерениям расстояний между различными телами, приводит к тому выводу, что наше пространство **евклидово**, а, следовательно, обладает свойствами однородности и изотропности.

2. (а) Как уже говорилось, мы можем измерять на опыте только расстояния между какими-то парами тел, т. е. определять только *относительное* положение тел по отношению к какому-то другому телу. То тело, относительно которого мы определяем положения остальных тел, называют **телом отсчета** (его, в принципе, можно выбрать совершенно произвольно), а совокупность связанной с этим телом системы координат в пространстве и некоторых часов называют **системой отсчета**.
- (б) Для классической механики характерно представление об абсолютности пространства и времени — принимается, что расстояния между телами и промежутки времени не зависят от движения системы отсчета, в которой они рассматриваются.

3. Очень важным модельным понятием в механике, без использования которого, невозможно сформулировать основные законы механики, является понятие материальной точки. **Материальной точкой** называется тело столь малое, что его размерами и внутренней структурой можно пренебречь, и единственно существенным является лишь его положение в пространстве³.

- (а) Согласно классическим (в смысле — некантовым) представлениям материальная точка имеет в каждый момент времени точно определенное место в пространстве, которое можно характеризовать заданием ее трех координат или радиус-вектора, как функции времени:

$$\vec{r} \equiv \{x, y, z\} = \vec{r}(t) \equiv \{r_\alpha(t)\}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Заметим, что это есть **физическое допущение** (в квантовой механике оно не выполняется). Будем считать, что зависимость радиус-вектора от времени (или координат от времени) описывается достаточно гладкими функциями, так что существуют их первые и

хотя скорость света, как фундаментальная постоянная природы, есть величина абсолютно точная, мы знаем ее сейчас еще недостаточно точно.

³Для макроскопической механики материальная точка — это некоторая идеализирующая модель. В микромире, однако, выясняется, что мы должны рассматривать элементарные частицы как, в несколько ограниченном смысле, настоящие материальные точки. Таким образом, понятие материальной точки оказывается первичным по сравнению с понятием протяженного тела не только с точки зрения логического удобства изложения, но и с точки зрения устройства природы

достаточное число высших производных (это — опять **физическое допущение**, несправедливое для квантового описания).

- (b) Тогда можно определить **скорость** материальной точки как производную ее радиус-вектора по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

и **ускорение** как производную скорости, т. е. вторую производную радиус-вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Векторы $\vec{r}$, $\vec{v}$ и $\vec{a}$ суть основные кинематические характеристики материальной точки.

4. (a) Чтобы задать вектор $\vec{r}(t)$, надо задать **три** скалярные функции. Говорят, что система из одной материальной точки имеет *три степени свободы*. Вообще, число независимых скалярных функций времени, которые нужно задать, чтобы полностью описать движение системы, называется ее **числом степеней свободы**.
- (b) В качестве описывающих движение системы независимых функций не обязательно, конечно, выбирать декартовы координаты составляющих систему материальных точек. Для этой цели можно взять любые n функций $q_1(t), \dots, q_n(t)$ (если n — число степеней свободы), полностью характеризующих движение. Они называются тогда **обобщенными координатами**, а их производные по времени

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1(t)}{dt}, \dots, \dot{q}_n = \frac{dq_n(t)}{dt}$$

— **обобщенными скоростями**. Итак, для одной материальной точки потребуются 3 обобщенные координаты, а для системы из N материальных точек без связей — $n = 3N$.

5. В классической теории задать **состояние системы** в некоторый момент времени — значит задать в этот момент времени значения стольких динамических переменных, что значения всех динамических переменных в остальные моменты времени смогут быть однозначно предсказаны. Опыт приводит нас к тому выводу, что для задания состояния механической системы достаточно задать значения всех ее обобщенных координат и обобщенных скоростей в некоторый момент времени⁴. Это утверждение составляет с чисто математической стороны некоторое дополнительное допущение, которое можно было бы и ослабить, — тогда мы пришли бы к теориям, которые объединяются именем механики с высшими производными. Рассмотрение таких теорий оказывается полезным в некоторых специальных разделах физики. Принимая, однако,

⁴задания одних значений координат — как говорят, конфигурации — в некоторый момент времени недостаточно для фиксации состояния — скоростям в тот же момент можно приписать произвольные значения

это допущение, мы приходим к тому выводу, что значения ускорений должны определяться однозначно, коль скоро задано состояние, то есть значения координат и скоростей в некоторый момент. Следовательно, ускорения в некоторый момент должны выражаться через координаты и скорости в тот же момент времени.

6. Соотношения, выражающие ускорения через координаты и скорости, называются **уравнениями движения** рассматриваемой системы.

Основная задача механики состоит в том, чтобы

- Устанавливать вид уравнений движения для механических систем и
- Интегрировать найденные уравнения, чтобы, найти в явном виде «движение» системы, т. е. зависимость обобщенных координат от времени.

1.3 Принцип наименьшего действия

Основные заслуги в установлении физических основ механики принадлежат Галилею и Ньютону, а разработка ее математической формы — Лагранжу и Гамильтону.

Принцип наименьшего действия позволяет компактным образом выяснить, какие именно ограничения на вид уравнений движения накладывают определенные физические требования.

Сопоставим каждой механической системе характеризующую ее функцию всех обобщенных координат, скоростей и времени

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

которую называют **функцией Лагранжа** этой системы и построим функционал

$$S(q_i) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

который называется **действием**.

Принцип наименьшего действия утверждает, что *действительные движения выделяются из всех мыслимых тем условием, что для них действие принимает экстремальные (для достаточно малых $t_2 - t_1$ — минимальные) значения.*

Требования принципа наименьшего действия приводят нас к **уравнениям Лагранжа-Эйлера**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Это уравнения второго порядка число их равно числу степеней свободы. Решение этой системы будет содержать $2n$ произвольных постоянных, то есть полностью определяться заданием состояния системы в момент времени t_0 .

1.4 Принцип относительности Галилея

Для описания механической системы нужно выбрать систему отсчета, связанную с каким-либо материальным телом. Инерциальные системы отсчета можно определить как системы, в которых первоначально покоящаяся материальная точка продолжает покоиться сколь угодно долго.

Мы можем принимать как опытный факт существование инерциальных систем отсчета, в которых пространство и время однородно и изотропно. Более того, оказывается, что существует не одна, а сколь угодно инерциальных систем отсчета. Именно: *если* K — инерциальная система отсчета, положение материальной точки в которой описывается радиус-вектором $\vec{r}$ в каждый момент времени t , а K' — система, в которой тоже событие имеет координаты $\vec{r}'$ и t' , причем все эти величины связаны преобразованием

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad t = t' \quad (\vec{V} = \text{const}), \quad (1)$$

то система K' будет по всем своим физическим свойствам эквивалентна системе K , т.е. тоже будет инерциальной. Это утверждение называют **принципом относительности Галилея**, а преобразования (1) — **преобразованиями Галилея**. Эти преобразования захватывают только пространство, время в классической механике абсолютно и не зависит от движения системы. Если продифференцировать первое уравнение из (1) по времени, мы приходим к закону сложения скоростей

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}$$

(в разных инерциальных системах отсчета одна и та же материальная точка обладает разными скоростями, «абсолютная» скорость и «абсолютный» покой не имеют смысла).

В силу принципа относительности Галилея функция Лагранжа для свободной материальной точки

$$L = \frac{m}{2} \vec{v}^2,$$

где $m > 0$ — постоянная масса.

Для замкнутой системы материальных точек функция Лагранжа примет вид:

$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2}{2} - \text{без учета взаимодействия между собой};$$
$$L = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2}{2} - U(\vec{r}_{\alpha}) - \text{с учетом взаимодействия внутри системы}, \quad (2)$$

где $U(\vec{r}_{\alpha})$ — функция зависящая от **конфигурации** (взаимного расположения частиц) системы — **потенциальная энергия**, в силу однородности пространства она может зависеть от всех α радиус-векторов частиц системы, но только от их $\alpha - 1$ разности $\vec{r} - a - \vec{r}_b$. Первое слагаемое выражает

кинетическую энергию (T), которую можно выразить и через обобщенные координаты

$$T = \sum_{i,k} \frac{a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k}{2}.$$

В функции Лагранжа содержится представление о мгновенности распространения взаимодействия — всякое изменение положения какой-либо одной частицы в тот же момент времени сказывается на силах, действующих на все остальные, ведь координаты всех частиц входят в U в один и тот же момент времени.

Если система из одной материальной точки находится во внешнем поле, то функции Лагранжа для нее

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(\vec{r}, t),$$

где функция $U(\vec{r}, t)$ называется потенциальной энергией во внешнем поле.

1.5 Законы сохранения

Всякое равенство вида $f(q_i, \dot{q}_i) = \text{const}$ называется **интегралом движения**. Для замкнутой системы с n степенями свободы всего существует $(2n - 1)$ независимых интегралов движения. Среди всех интегралов движения особое значение имеют *аддитивные* интегралы движения, для которых существует специальное название **законы сохранения**.

Законы сохранения имеют весьма глубокое происхождение, связанное с инвариантностью описания механической системы относительно некоторой группы преобразований времени и координат. Существует весьма общая *теорема Нётер*, которая позволяет при заданном виде функции Лагранжа, найти аддитивные интегралы движения в виде явных функций координат и скоростей, не интегрируя никаких уравнений, — ведь в общем случае каждый из интегралов движения находится лишь интегрированием системы, число уравнений которой лишь на одно меньше полной системы уравнений движения.

Группа **преобразований симметрий**, входящая в теорему Нётер, зависит от природы физической системы. Для замкнутых механических систем действие должно быть инвариантно относительно семипараметричной группы преобразований — зависящего от одного параметра сдвига во времени, зависящих от трех параметров пространственных сдвигов и зависящих от трех параметров вращений пространства. В соответствие с этим у всякой замкнутой системы должны существовать 7 сохраняющихся величин.

1.5.1 Теорема Нётер

Рассмотрим некоторую систему, описываемую функцией Лагранжа

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Форма уравнений Лагранжа-Эйлера, получаемых из вариационного принципа, инвариантна относительно преобразований вида $q'_i = f_i(q_j, t)$ и $t' = f(t)$. Теореме Нётер интересуется тем исключительным случаем, когда изменений выражения для действия, как функционала новых координат, не происходит.

Если рассмотрим преобразования

$$t' = t + \delta t, \quad \delta t = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \lambda; \quad q'_i(t') = f_i(q_j, t, \lambda) = q_i(t) + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \lambda, \quad (3)$$

где λ — параметр преобразований координат и времени.

Тогда из инвариантности действия относительно преобразований (3) мы получим следствие, что величина

$$\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} = const \quad (4)$$

сохраняется во времени. Это и есть точное утверждение теоремы Нётер.

1.5.2 Закон сохранения энергии

Найдем аддитивный закон вытекающий из преобразований симметрий относительно временного сдвига. В связи с этим в (3) необходимо положить $\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 1$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = 0.$$

Оно означает, что как следствие инвариантности действия относительно временного сдвига сохраняется динамическая величина

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = const,$$

которую называют энергией системы.

Если функцию Лагранжа представить в виде (2) разности кинетической и потенциальной энергий, то для энергии получится

$$E = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - U) = 2T - T + U = T + U,$$

т.е. она представится в виде суммы кинетической и потенциальной энергий. В частности, энергия системы материальных точек в декартовых координатах в инерциальной системе отсчета примет вид

$$E = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2}{2} + U(\vec{r}_a - \vec{r}_b).$$

1.5.3 Сохранение импульса

Найдем теперь аддитивный закон сохранения, вытекающий из однородности пространства, т.е. выберем в качестве преобразования (3) пространственный сдвиг. Это приводит к упрощениям $\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} = 1$ и $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0.$$

Величина $\vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$ называется **импульсом** a -ой материальной точки. Поэтому получаем, что вектор

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \text{const}, \quad \frac{dP}{dt} = 0,$$

называемый **импульсом** системы материальных точек, сохраняет во время движения постоянное значение.

Если для системы материальных точек функция Лагранжа примет вид (2), то

$$\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a, \quad P = \sum_a m_a \vec{v}_a.$$

(последняя формула справедлива лишь в частном случае, она будет неприменима, например, при наличии магнитных взаимодействий.)

С помощью введенного понятия импульса материальной точки можно записать уравнения Лагранжа-Эйлера в декартовых координатах как

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = \vec{F}_a, \quad \text{где} \quad \vec{F}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}$$

называется **силой**, действующей на a -ую материальную точку. Эти уравнения движения называют уравнениями движения в Ньютоновой форме. Суммирую эти уравнения по всем материальным точкам, получим, что в силу закона сохранения импульса $\sum_a \vec{F}_a = 0$ — **в замкнутой системе сумма сил равна нулю**. Для двух частиц это дает $F_1 = -F_2$ — третий закон Ньютона.

При использовании для описания системы произвольных обобщенных координат удобно ввести по аналогии названия «**обобщенные импульсы**» — $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ и «**обобщенные силы**» — $F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, с помощью которых уравнения движения записываются в «квазиньютоновой» форме $\dot{p}_i = F_i$.

1.5.4 Момент

Чтобы найти аддитивную величину, сохраняющуюся в силу **изотропии** пространства, опять удобно работать в декартовой системе координат, где бесконечно малый поворот можно параметризовать,

выбирая в качестве параметра λ составляющие бесконечно малого вектора $\delta\vec{\varphi}$, направленного по оси вращения по правилу правого винта, и записывая преобразование (3) в виде

$$\vec{r}'_a = f_a(\vec{r}_a, \delta\vec{\varphi}) = \vec{r}_a + [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}_a].$$

Теорема Нётер будет утверждать, что

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_a \vec{p}_a \cdot [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}_a] \right) = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_a [\vec{r}_a \cdot \vec{p}_a] \right) = 0.$$

Векторную величину

$$\vec{m}_a = [\vec{r}_a \cdot \vec{p}_a]$$

называют **моментом** материальной точки (*моментом импульса* или *моментом количества движения*). Таким образом, из теоремы Нётер следует, что из инвариантности относительно пространственных поворотов следует сохранение вектора

$$\vec{M} = \sum_a \vec{m}_a = \sum_a [\vec{r}_a \cdot \vec{p}_a] = \text{const}, \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = 0,$$

называемого **моментом** системы.

Итак мы установили, что для всякой замкнутой механической системы сохраняются E , $\vec{P}$ и $\vec{M}$ — скаляр и два вектора — всего семь величин.

1.6 Одномерное движение

1. Примером использования законов сохранения, в котором за этот счет удастся вовсе обойти интегрирование уравнений движения может служить случай системы с 1 степенью свободы — случай **одномерного движения** во внешнем поле, не зависящем от времени.

Функция Лагранжа для системы материальных точек в декартовых координатах в инерциальной системе отсчета может иметь наиболее общую форму

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q),$$

а поскольку U не зависит от $\dot{q}$, то энергия $E = \frac{a\dot{q}^2}{2} + U(q) = \text{const}$ должна сохраняться. Разрешая это соотношение относительно $\dot{q}$ мы приходим к дифференциальному уравнению I порядка

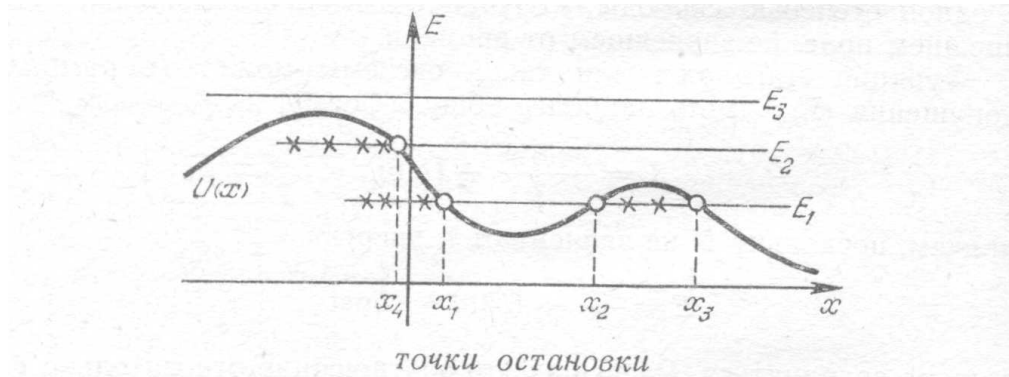
$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{a(q)}(E - U(q))},$$

которое для любого $U(q)$ интегрируется в квадратурах, в результате чего закон движения принимает вид

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} + t_0, \quad (5)$$

(при условии, что q — это декартова координата x материальной точки, которая может двигаться только вдоль прямой, а $a(q) = m$ — масса частицы).

2. Встает вопрос о выборе знаков корня и пределов интегрирования по x . Под корнем в интеграле (5) стоит фактически кинетическая энергия, которая существенно положительна. Таким образом движение возможно только для тех значений x , для которых $U(x) \leq E$ (интеграл дает вещественное решение). Мы можем проиллюстрировать это обстоятельство графически, изобразив на одном и том же чертеже кривую потенциальной энергии $U(x)$ и «прямую» полной энергии E , не зависящей от x .



Области, где — при выбранном значении полной энергии E — движение запрещено, отмечены на рисунке крестиками. Границей допустимых и запрещенных для движения областей являются точки, в которых $U(x) = E$, которые называются **точками остановки** или **точками поворота**. В них кинетическая энергия — а, следовательно, и скорость — обращаются в нуль. Относительно скорости можно утверждать и больше: вообще говоря в *точке остановки скорость меняет знак* и интегралы (5) нам для каждого значения координаты два возможных движения, отличающихся знаком скорости. Таким образом пределами интегрирования в (5) служат точки остановки, и при прохождении такой точки движение переходит с одной ветви корня на другую.

3. Наличие точек остановки может служить для классификации движения в целом:
 - если допустимая область движения ограничена точками остановки с обеих сторон (как для значения энергии, равного E_1), т. е. движение может происходить только в конечной области пространства, то такое движение называют **финитным**;
 - если имеется только одна точка остановки (как для движений справа от x_1 при энергии E_1 , или справа от x_4 при энергии E_2), то материальная точка может прийти из бесконечности, дойти до точки остановки, переменить там знак скорости и снова уйти в бесконечность;
 - если точек остановки нет вовсе (как при энергии E_3), то материальная точка проходит из одной бесконечности в другую, сохраняя знак скорости неизменным. В обоих последних случаях движение называют **инфинитным**.

В случае *финитного* движения встает вопрос о его **периоде** — о промежутке времени, по истечении которого состояния системы, т. е. значения x и $\dot{x}$, повторяются. Поскольку движение между ограничивающими финитное движение точками остановки x_1 и x_2 требует одинакового времени в прямом и обратном направлении, то период будет равен удвоенному времени движения от одной точки остановки до другой:

$$T(E) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (6)$$

Как видно из последнего выражения, период системы является функцией ее энергии.

1.7 Уравнения Гамильтона

В лагранжевом формализме система с n степенями свободы описывалась n уравнениями второго порядка. Иногда бывает удобнее перейти от них к $2n$ уравнениям первого порядка. Такие уравнения оказываются более «красивыми» и симметричными, если в качестве основных переменных выбрать не координаты и скорости, а координаты и импульсы

$$p_i = p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7)$$

1. Преобразование переменных, описываемое (7), когда новые переменные $p_1, \dots, p_n$ суть частные производные по старым переменным $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ от некоторой одной функции, называется **преобразованием Лежандра**, а эта функция называется **производящей функцией** по отношению к *преобразуемым* переменным. Итак, импульсы получаются из скоростей преобразованием Лежандра, причем производящей функцией является функция Лагранжа системы. Координаты q_i и время t играют в этом преобразовании роль параметров.

Если детерминант $\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$, что мы будем предполагать, то такое преобразование обратимо. Тогда в силу теорем Донкина

- обратное преобразование тоже будет обладать производящей функцией, которая называется **функцией Гамильтона**

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p, q, t) - L(q, \dot{q}(p, q, t), t) \quad (8)$$

(производящая функция для обратного преобразования от импульсов к скоростям).

- Частные производные функций Лагранжа и Гамильтона по играющим в преобразовании Лежандра роль параметров координатам и времени будут связаны соотношениями

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_{\dot{q}_i, t} = - \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)_{p_i, t} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_{q, \dot{q}} = - \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{q, p} \quad (9)$$

2. Обратное преобразование (7), соотношения (9) и воспоминание о том, что в силу уравнений Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$ позволяют выписать полный дифференциал функции Гамильтона в виде

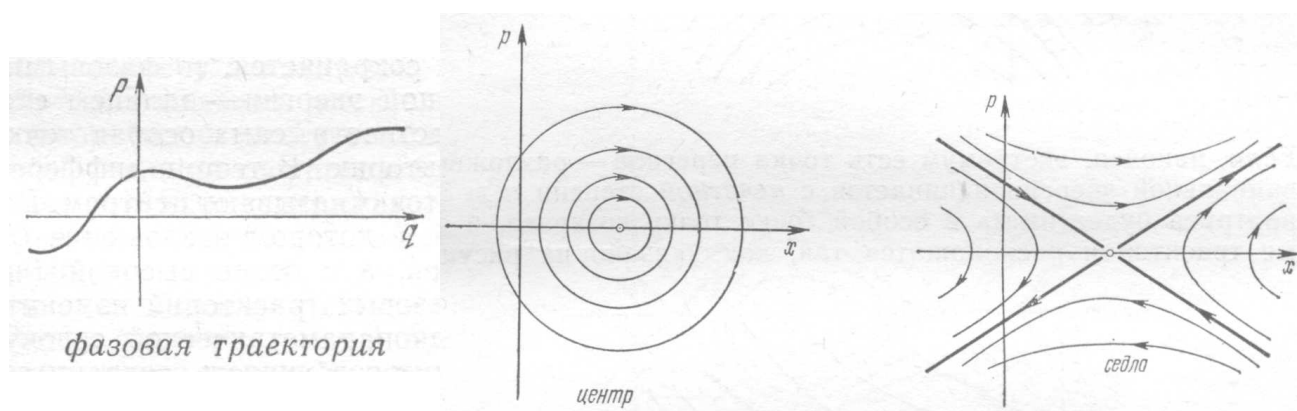
$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (10)$$

Эта форма уже содержит в себе систему основных уравнений механики, записанных как уравнения первого порядка в переменных p и q , — **уравнения Гамильтона**:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (11)$$

В силу красоты и симметрии этих уравнений их называют также **каноническими уравнениями механики**, а переменные — координаты и импульсы — в терминах которых выписываются эти уравнения, — **каноническими переменными**. Для дальнейшего имеет особое значение то обстоятельство, что именно такой выбор уравнений и переменных оказывается наиболее удобным при переходе от классического описания к квантовому.

3. В лагранжевом формализме состояние механической системы (в некоторый момент времени) фиксировалось заданием значений всех обобщенных координат и всех обобщенных скоростей. При использовании канонических уравнений мы можем фиксировать состояние заданием значений всех координат и импульсов. Поэтому, если построить (для системы с n степенями свободы) $2n$ -мерное пространство, координатами которого служат обобщенные координаты и импульсы системы, то каждая точка в нем будет отвечать определенному состоянию системы. Такое пространство называют обычно **фазовым пространством**, а его точки, изображающие состояния системы в некоторый момент времени, — **изображающими точками**. Совокупность точек, изображающих состояния системы в различные моменты времени, образует в фазовом пространстве некоторую кривую. Ее называют **фазовой траекторией** системы.



Топологическая картина расположения фазовых траекторий в фазовом пространстве позволяет сделать ряд заключений о характере возможных движений системы. Чтобы составить себе такую картину, удобно исследовать (11) с помощью качественной теории дифференциальных

уравнений. Особенно успешно оказывается такое исследование в простейшем случае одной степени свободы.

Если система описывается функцией Лагранжа

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x), \quad H = \frac{p^2}{2m} + U(x),$$

то особыми точками уравнений (11) будут те, в которых одновременно

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Первое условие выполняется при $p = 0$; второе означает, что потенциальная энергия в особой точке должна иметь экстремум.

Если этот экстремум есть минимум, то в окрестности экстремальной изображающей точки $(0, x_0)$ функции Лагранжа и Гамильтона будут иметь вид:

$$H(p, x) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k(x - x_0)^2}{2}$$

Поскольку энергия сохраняется, то фазовыми траекториями будут линии постоянной энергии — эллипсы с центром в особой точке $(0, x_0)$. В теории дифференциальных уравнений такую особую точку называют **центром**. Если экстремум есть минимум, но такой, в котором разложение U по $(x - x_0)$ начинается не со второй, а с более высокой (четной) степени, то конкретный вид фазовых траекторий изменится, однако качественная картина однопараметрической совокупности замкнутых кривых, окружающих особенность, сохранится.

Если экстремум есть максимум, то в окрестности экстремальной изображающей точки $(0, x_0)$ функция Гамильтона запишется как

$$H(p, x) = E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k(x - x_0)^2}{2} + E_0$$

и фазовыми траекториями будут гиперболы с центром в особой точке $(0, x_0)$.

В этом случае траектории разбиваются на четыре класса. Траектории разных классов разделяются на фазовой плоскости парой пересекающихся прямых, называемых **сепаратрисами**, которые состоят из пяти объектов — четырех лучей и одной изолированной точки $(0, x_0)$. Такая особая точка называется **седлом**.

4. Вычислим полную производную функции Гамильтона по времени:

$$\frac{dH}{dt} = - \sum \dot{p}\dot{q} + \sum \dot{q}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Таким образом,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Значит, если функция Гамильтона не зависит от времени явно — а в силу (11) это равносильно тому, что не зависит от времени явно функция Лагранжа, — то она **сохраняется**. Вспоминая определение энергии системы, видим, что *если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то ее численное значение совпадает с энергией системы*.

1.8 Скобки Пуассона

Механику в форме Гамильтона (часто говорят **гамильтонов формализм** для механики) можно привести к очень «красивому» виду, если ввести одно специальное образование, которое будет играть в дальнейшем очень существенную роль.

1. Пусть $f = f(q, p, t)$ и $g = g(q, p, t)$ — две функции координат, импульсов и времени. **Скобкой Пуассона** величин f и g называется выражение:

$$(f, g) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (12)$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами:

- (a) $(f, g) = -(g, f)$ — *антисимметрия*;
- (b) $(f, \text{const}) = 0$;
- (c) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$, $(cf, g) = c(f, g)$ — *линейность*;
- (d) $(f_1 f_2, g) = (f_1, g) f_2 + f_1 (f_2, g)$, $(f, g_1 g_2) = (f, g_1) g_2 + g_1 (f, g_2)$ — *распределительное свойство по отношению к умножению*;
- (e) $\frac{\partial}{\partial t} (f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g \right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t} \right)$ — *правило Лейбница для частного дифференцирования по времени*;
- (f) $(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) = 0$ — **тождество Якоби**.

2. Важные специальные скобки Пуассона:

$$(f, q_i) = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad (f, p_i) = -\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (q_i, q_j) = 0, \quad (p_i, q_j) = \delta_{ij}, \quad (p_i, p_j) = 0. \quad (13)$$

3. Эти специальные значения сразу подсказывают нам, как использовать скобки Пуассона для усовершенствования записи гамильтонова формализма. В самом деле, с помощью (13) уравнения Гамильтона (11) принимают вид

$$\dot{q}_i = (H, q_i), \quad \dot{p}_i = (H, p_i) \quad (14)$$

замечательной симметрией, с которой в него входят координаты и импульсы. Если мы возьмем любую динамическую величину — т. е. любую функцию f координат, импульсов и времени —

и вычислим ее полную производную по времени

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right),$$

то сумма в правой части — это как раз скобка Пуассона.

Таким образом, для *любой динамической величины* f :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) \quad (15)$$

— полная производная по времени равна частной производной плюс скобка Пуассона на функции Гамильтона с этой величиной. Если же, в частности, динамическая величина f не зависит от времени явно, то

$$\frac{df}{dt} = (H, f), \quad \text{если} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

ее полная производная по времени равняется скобке Пуассона функции Гамильтона с ней.

Уравнения (15) представляют собой замечательно компактную и симметричную форму записи всей механики. Сами уравнения Гамильтона получаются теперь из (15) в качестве частного случая.

4. Если две рассматриваемые динамические величины f и g суть *интегралы движения*, $\frac{df}{dt} = 0$, $\frac{dg}{dt} = 0$, то и величина (f, g) будет *интегралом движения* $(f, g) = \text{const}$. Последнее утверждение носит название **теоремы Пуассона**.

1.9 Канонические преобразования

Общая форма уравнений Лагранжа-Эйлера не меняется при переходе от одних обобщенных координат к другим, т.е. при произвольном преобразовании вида

$$Q_i = Q_i(q_j, t), \quad \left(\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \neq 0 \right),$$

но разумеется — невырожденном. То же должно быть справедливо и для уравнений Гамильтона (11). Но последние уравнения инвариантны относительно более общих преобразований, перемещающих координаты и импульсы.

Введем новые координаты и новые импульсы как функции старых координат, импульсов и времени

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t), \quad (17)$$

с единственным условием обратимости

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \neq 0.$$

Если такое преобразование сохраняет форму (11) уравнений Гамильтона, то оно называется **каноническим преобразованием**.

Достаточное условие каноничности преобразования (17) можно записать как

$$\sum p_i dq_i - H dt' = \sum P_i dQ_i - H' dt + df,$$

при условии, что переход от старых и новых координат к старым и новым импульсам $\{q_i, Q_i\} \Rightarrow \{p_i, P_i\}$ был бы преобразованием Лежандра. Тогда производящая функция $f(q, Q, t)$ этого преобразования будет **производящей функцией** канонического преобразования (17).

При этом справедливо утверждение, что *всякое преобразование (17), сохраняющее скобки Пуассона, есть каноническое преобразование* (справедливо и обратное утверждение).

Рассмотрим теперь произвольную механическую систему, сделаем каноническое преобразование с производящей функцией $f = f(q, P, t)$, так что

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial f}{\partial P_i},$$

причем постараемся выбрать производящую функцию так, чтобы новая функция Гамильтона

$$H'(Q, P, t) = H(q, p) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Записанное через производящую функцию f это требование приобретает форму

$$H \left(\frac{\partial f}{\partial q}, q, t \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (18)$$

— т.е. является по отношению к f дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка и степеней: первой — по отношению ко времени, второй — по отношению к остальным переменным, если функция Гамильтона имеет вид суммы кинетической и потенциальной энергии. Это уравнение называется **уравнением Гамильтона–Якоби**.

Как в рассмотренном примере, так и в общем случае преобразования Гамильтона–Якоби мы сталкиваемся с ситуацией, что новая функция Гамильтона H' не зависит от времени явно, но, тем не менее, не совпадает с физической энергией системы⁵.

⁵Этот парадокс находит себе исчерпывающее объяснение лишь в квантовой механике, где выясняется, что рассмотренному нами зависящему от времени каноническому преобразованию Гамильтона–Якоби отвечает переход от представления Гейзенберга к представлению Шредингера, в котором появляется «другая» функция Гамильтона, управляющая изменением во времени состояния системы — концепции, не имеющей себе в классической механике прямого аналога. Тогда оказывается, что роль физической энергии играет, грубо говоря, сумма этих двух гамильтоновых функций — она-то и сохраняется или не сохраняется, судя по тому, замкнута ли физическая система или нет.

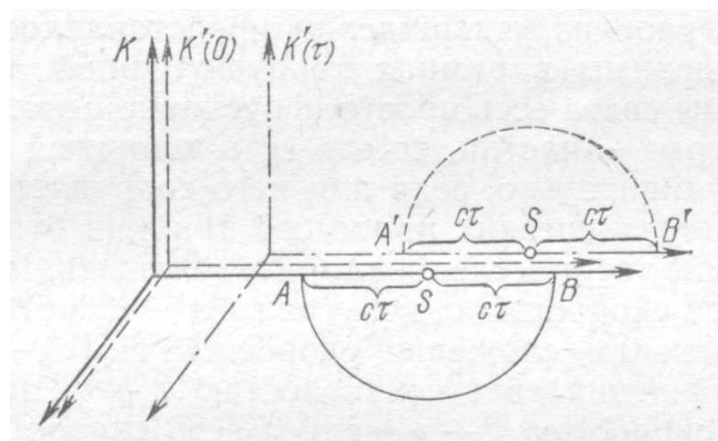
2 Специальная теория относительности

2.1 Принцип относительности и принцип постоянства скорости света

Классическая механика основывалась по существу на двух фундаментальных физических допущениях: принималось, что

1. справедлив принцип относительности, т. е. все инерциальные системы отсчета равноправны (это утверждение часто формулируют в виде «принципа невозможности» — никакими механическими опытами нельзя установить выделенное положение какой-либо одной инерциальной системы отсчета относительно всех остальных; такие принципы невозможности удобны для формулировки фундаментальных физических положений — формулировка закона сохранения энергии в форме принципа невозможности построения вечного двигателя первого рода);
2. состояние системы — следовательно, в частности, и силы, действующие на некоторую частицу, — в какой-либо момент времени определяется полностью координатами и скоростями всех частиц системы в тот же момент времени — т. е. принималось представление о мгновенности распространения взаимодействий.

При переходе от чисто механических явлений к области оптики и электродинамики выяснилось, что в природе существует процесс — распространение света или электромагнитных волн — обладающий парадоксальными свойствами. Именно, с одной стороны, для явлений, включающих этот процесс, **принцип относительности сохраняется**, т. е. оптические или электромагнитные эффекты также не позволяют преимущественно выделить какую-либо частную инерциальную систему отсчета; но в то же время **скорость света не зависит от движения источника** под этим имеется в виду, что в некоторой покоящейся инерциальной системе отсчета K скорость света, испускаемого движущимся в этой системе источником S' , та же, что и для испускаемого покоящимся (в K) источником S .



Мы видим, таким образом, что утверждения (1) и (2) кажутся противоречащими друг другу. Противоречие это не связано с рассматривавшимися конкретными механизмами распространения света. В самом деле, рассмотрим две системы отсчета, «неподвижную» систему K и движущуюся относительно нее систему K' , и пусть в момент времени $t = 0$ начала отсчета этих двух систем совпадают. Тогда спустя некоторое время τ эти две системы сдвинутся относительно друг друга. Пусть теперь в момент времени $t = 0$ в точке с координатами $x = x'$ источник S (в силу утверждения (2) состояние его движения для нас безразлично!) испускает световой сигнал. К моменту τ этот сигнал достигнет в системе K точек A и B с координатами $x - c\tau$ и $x + c\tau$. Однако в силу утверждения (1) этот сигнал должен достигнуть в тот же момент в системе K' точек A' и B' с координатами $x - c\tau$ и $x + c\tau$. Поскольку система K' движется относительно K , то в момент τ A' *не будет* совпадать с A , а B' — с B . Но световой сигнал приходит в момент τ в какие-то *определенные* точки вне зависимости от того, в какой системе отсчета мы описываем его распространение — т. е. мы приходим к противоречию.

Научный подвиг Эйнштейна состоял в том, чтобы пойти в разрешении образовавшегося парадокса по самому простому пути — коль скоро оба утверждения (1) и (2) суть прямые обобщения опытных фактов, то они не могут находиться в логическом противоречии друг с другом. Поэтому оба эти утверждения следует постулировать как основные физические принципы — **принцип относительности** (1) и **принцип постоянства скорости света** (2). Источник же только что проиллюстрированного противоречия следует искать не в неверности одного из этих принципов, а в некритическом использовании представлений, основанных на обычном «здравом смысле».

Если пересмотреть проведенное рассуждение с такой точки зрения, то можно заметить, что мы неявно допустили в нем, что время *течет* в движущихся друг относительно друга системах отсчета K и K' одинаковым образом, т. е. **допустили абсолютность времени** (3). Таким образом в логическом противоречии оказываются не два утверждения (1) и (2), а три — (1), (2) и (3). Одно из них должно быть неверным, и поскольку только третье, как показал проведенный Эйнштейном анализ, не имело на самом деле никакого опытного подтверждения, то именно им и приходится пожертвовать.

Таким образом за логическую совместность принципов относительности и постоянства скорости света приходится расплачиваться отказом от «очевидного» представления об абсолютности времени, приходится принимать, что каждой инерциальной системе отсчета K' соответствуют не только *свои* координаты x' , y' , z' , но и *свое время* t' . В дальнейшем построении вытекающей из принципов (1) и (2) теории — такая теория называется **специальной теорией относительности** — мы не будем точно следовать оригинальным рассуждениям Эйнштейна, но в целях упрощения изложения сразу воспользуемся предложенной Минковским в 1908 году геометрической интерпретацией.

Основным понятием этой интерпретации является понятие **события**, которое характеризуется местом, *где* и временем, *когда* оно происходит. Это место и время может быть указано только по отношению к некоторой системе отсчета K — в ней событие характеризуется четверкой чисел (**координат события**) $\{t, x, y, z\} = \{t, \vec{r}\}$. Таким образом в каждой системе отсчета координаты событий образуют некоторое четырехмерное многообразие. В другой системе K' координаты событий $\{t', x', y', z'\} = \{t', \vec{r}'\}$ образуют другое четырехмерное многообразие. Чтобы установить связь между 4-многообразиями, изображающими события в двух системах отсчета, обратимся к основным принципам (1) и (2).

Рассмотрим два события: S_1 — состоящее в испускании светового сигнала в некотором месте в некоторый момент, и S_2 — состоящее в регистрации того же сигнала в другой момент в другом месте. В системе отсчета K координатами S_i будут $\{t_i, x_i, y_i, z_i\}$, в системе отсчета K' — $\{t'_i, x'_i, y'_i, z'_i\}$. В силу (1) и (2) распространение света в обеих системах происходит с одной и той же скоростью c , т. е.

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad c(t'_2 - t'_1) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}.$$

причем можно утверждать, что из выполнения одного из этих равенств должно следовать выполнение другого.

Высказанное утверждение можно сформулировать в красивой геометрической форме, если соотнести *каждой* паре координат событий — число s , называемое **интервалом**, по формуле

$$-s_{21}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (19)$$

Тогда то обстоятельство, что события S_1 и S_2 могут состоять в испускании и регистрации одного и того же светового сигнала, можно записать в *любой* системе отсчета в форме требования:

$$s_{21} = 0, \quad s'_{21} = 0.$$

Итак, в силу принципов (1) и (2) факт обращения интервала между двумя событиями в нуль *не зависит от системы отсчета*, это обстоятельство характеризуют словами, что нулевые интервалы — инварианты.

Но удобнее рассматривать интервал между двумя бесконечно близкими событиями

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Для таких интервалов, конечно, тоже сохраняется выражающее принципы (1) и (2) основное свойство, что из обращения интервала между двумя событиями в нуль в одной системе отсчета следует его обращение в нуль в другой и наоборот, что приводит нас к значительно более сильному утверждению $ds^2 = ds'^2$ об инвариантности не только нулевых, но и произвольных бесконечно-малых интервалов.

Итак, основные физические принципы (1) и (2) позволяют установить в многообразии координат событий квадратичную форму (19), значение которой *не зависит* от выбора системы отсчета. Пользуясь этим можно ввести в многообразии событий **метрику**, полагая «квадрат расстояния» между событиями равным значению формы (19), и превратить тем самым многообразие событий в пространство, точками которого эти события являются.

Таким образом в нашей геометрической интерпретации обычное трехмерное пространство и время объединяются в одно четырехмерное пространство (далее будем говорить для краткости 4-пространство), которое называют **пространством Минковского** или **миром Минковского** (в соответствии с последним термином, события, являющиеся точками мира Минковского, называют **мировыми точками** или 4-точками), а линии в этом пространстве — **мировыми линиями**).

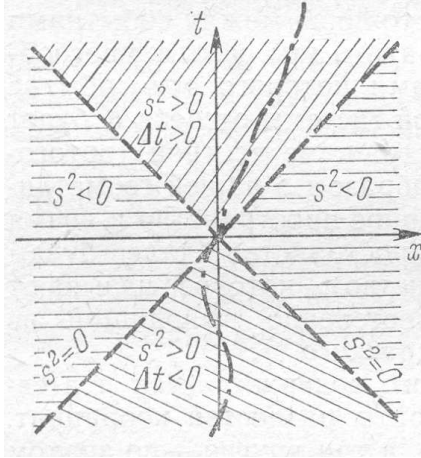
Метрика (19) мира Минковского содержит (как и в евклидовом пространстве) только квадраты разностей координат, но один из них входит со знаком «+», а три другие — со знаком «-»; такое пространство принято называть **псевдоевклидовым** (точнее, псевдоевклидовым с сигнатурой $(+, -, -, -)$). Благодаря индефинитности метрики псевдоевклидова пространства его геометрия в некотором смысле богаче содержанием, чем евклидова. В то время как пары точек евклидова пространства могут качественно находиться (если они не совпадают) только в одном соотношении друг с другом, квадрат псевдоевклидова «расстояния»

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2, \quad (\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

может быть как положительным, так и отрицательным или (для несовпадающих точек!) равным нулю. В соответствии с этим возникают три качественно разные возможности взаимного расположения двух мировых точек — если квадрат разделяющего их интервала: $s^2 > 0$, то интервал называют **времени-подобным**; $s^2 = 0$ — **свето-подобным**; $s^2 < 0$ — **пространственно-подобным**. Те же термины употребляют и по отношению к самой паре: говорят «точка А пространственно-подобна точке В» и т. п.

Если фиксировать одну из точек пары, — скажем принять ее за начало отсчета некоторой системы координат, — то все остальные мировые точки разобьются в смысле этого отношения на три класса, т. е. все 4-пространство разобьется на три области. Поскольку условие $s^2 = 0$ — есть уравнение, то размерность области, занятой точками, свето-подобными началу координат, будучи на единицу меньше размерности пространства, будет образовывать в нем 3-мерную (на чертеже — одномерную) гиперповерхность. Эта гиперповерхность называется **световым конусом** (на чертеже виден только след, образовавшийся при сечении светового конуса плоскостью $y = z = 0$: две прямые $x = \pm ct$). Световой конус служит границей областей, пространственно-подобных и времени-подобных началу координат. На чертеже каждая из этих областей выглядит в свою очередь разбитой

на две несвязные подобласти; однако в реальном 4-случае, как легко сообразить, пространственно-подобная область связна (хотя и не односвязна); времени же подобная область действительно распадается на две несвязные подобласти соответственно знаку разности временной координаты. Таким образом фактически все 4-пространство разбивается даже не на три, а на четыре различные области.



С обычной трехмерной точки зрения выбор системы 4-координат — это выбор некоторой инерциальной системы отсчета, а инерциальная система отсчета фиксируется заданием каких-либо материальных тел (или материального тела), которые принимаются в этой системе за неподвижные. Но материальное тело занимает в каждый момент времени некоторое определенное положение в пространстве; поэтому оно представляется в геометрической интерпретации Минковского непрерывной цепочкой событий — мировой линией.

В частности, материальное тело, олицетворяющее начало координат обычного 3-пространства в выбранной системе отсчета, есть совокупность событий, образующих в 4-пространстве прямую линию — ось времени системы координат в 4-мире.

Интервал между любой парой принадлежащих этой линии событий, поскольку для них $\Delta l = 0$, всегда времени-подобен $\Delta s^2 > 0$. Это свойство означает, что мировая линия, изображающая материальную частицу, **всюду времени-подобна**, т. е. любая пара ее точек разделена времени-подобным интервалом.

Итак, пары событий, разделенных времени-подобными интервалами, могут физически соответствовать двум разным моментам «жизни» одной и той же материальной частицы или — выражаясь более абстрактно — лежать на оси времени некоторой (инерциальной) системы отсчета — этим и объясняется принятый в их отношении термин (отсюда мы видим, что материальное тело в теории относительности не может ни в какой системе отсчета двигаться со скоростью, большей скорости света). В самом деле, если некоторое материальное тело двигалось бы со скоростью, большей , то оно изображалось бы на нашем графике мировой линией, лежащей *вне* светового конуса; пары событий на такой линии были бы разделены (в системе K) *пространственно-подобными* интервалами. Однако с этим телом можно было бы, как и с каждым материальным телом, связать систему отсчета K' , в которой оно покоится, — в ней та же мировая линия была бы осью времени, т.е. интервалы между лежащими на ней событиями были бы *времени-подобны*. Таким образом знак интервала зависел бы от системы отсчета, что в силу инвариантности интервала невозможно.

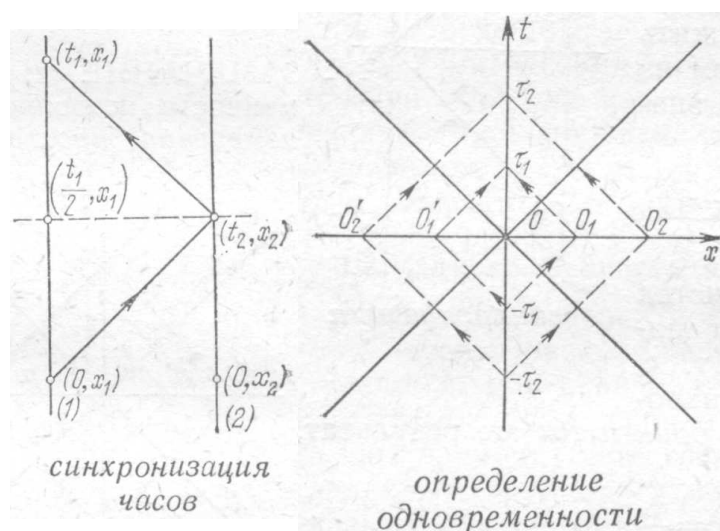
Физический смысл *свето-подобного* расположения двух событий — это события, которые могут быть связаны световым сигналом, а световой конус есть просто геометрическое место траекторий таких сигналов, испускаемых из одной 4-точки (или принимаемых в ней).

2.2 Одновременность и пространство

С четырехмерной точки зрения под пространством (в некоторый момент времени) естественно понимать совокупность всех одновременных друг другу событий. Таким образом пространство оказывается определяемым через понятие **одновременности**. Однако как раз с понятием одновременности в теории относительности дело обстоит совсем не просто — мы уже видели, что два основных принципа несовместны с интуитивным представлением о независимости одновременности от выбора системы отсчета.

Поэтому будем рассуждать в рамках некоторой фиксированной инерциальной системы отсчета K и допустим, что одновременность событий, происходящих в ней в разных местах, как-то установлена, т. е. что мы каким-то способом (неизвестно - хорошим или плохим) умеем синхронизировать часы, покоящиеся в разных точках, скажем в точках x_1 и x_2 . На рисунке изображены мировые линии (1) и (2) этих часов и «одновременные» события $(0, x_1)$ и $(0, x_2)$.

Произведем теперь два (мысленных) опыта. Во-первых, испустим в пространственной точке x_1 в момент времени 0 (событие $(0, x_1)$) световой сигнал и зарегистрируем его приход в пространственную точку x_2 в момент t_2 (событие (t_2, x_2)). Во-вторых, одновременно с регистрацией сигнала направим из точки x_2 (то же событие (t_2, x_2)) ответный сигнал в точку x_1 . Пусть его прибытие в x_1 , будет зарегистрировано в момент t_1 (событие (t_1, x_1)). Каждый из этих опытов может служить для определения скорости света, причем из первого опыта мы получим для нее значение $\frac{|x_2 - x_1|}{t_2}$ а из $\frac{|x_2 - x_1|}{t_1 - t_2}$. Однако из-за изотропии пространства скорость света не может зависеть от направления распространения сигнала, т. е. оба опыта должны (при *правильной* синхронизации часов в разных местах!) дать *один и тот же* результат, т. е. должно быть $t_1 - t_2 = t_2$. Иными словами, событием в пространственной точке x_1 , одновременным событию (t_2, x_2) , должно быть событие $(t_1/2, x_1)$.



Рассмотренные мысленные опыты позволяют теперь сформулировать определение **одновременности**: назовем событие Θ' **одновременным** событию Θ , имеющему координаты $t = 0, x = 0$, если

световой сигнал, испущенный в момент $t = -\tau$ по часам, покоящимся (в системе K) в пространственной точке $x = 0$, вернется после отражения (событие Θ') в то же место $x = 0$ в момент $t = +\tau$ по тем же часам. На рисунке изображены две пары таких одновременных ΘO событий Θ_1, Θ'_1 и Θ_2, Θ'_2 , отличающиеся направлением испущенного сигнала (внутри пары) и временем распространения сигнала 2τ .

Поэтому можно дать дальнейшее определение: для всех τ и всех направлений распространения события Θ' образуют в совокупности гиперплоскость $t = 0$, называемую **пространством** в момент $t = 0$. Пространство не будет зависеть от того, относительно какой его точки его начали строить.

Поскольку принцип причинности требует чтобы причина всегда предшествовала бы следствию во времени, то причинно-следственные соотношения могут связывать лишь пары событий, интервал между которыми времени-подобен. Но о всякой паре событий A и B , связанных соотношениями причины–следствия, всегда можно сказать, что из 4-точки A посылался сигнал, принятый в 4-точке B . Такими образом, оказывается, что в теории относительности любой сигнал из некоторой 4-точки A может быть послан лишь в 4-точки, отделенные от A времени-подобным интервалом. Но этому всегда будет соответствовать скорость распространения сигнала, *меньшая скорости света* c (или, в крайнем случае свето-подобного интервала, *равная ей*). Таким образом выясняется, что в теории относительности скорость света **есть максимально возможная скорость сигнала или максимально возможная скорость распространения взаимодействий** (*скорости, не могущие служить для передачи сигнала, не ограничены этим пределом, так, если поворачивать источник направленного светового пучка, то на достаточно удаленном «экране» «образуемый этим пучком «зайчик» может двигаться сколь угодно быстро*). Итак, механика теории относительности отличается от классической механики тем, что в ней существует **максимальная скорость распространения взаимодействий**.

2.3 Замедление времени

Рассмотрим теперь материальное тело, движущееся по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета K произвольным образом (не обязательно равномерно и прямолинейно). Время τ , измеренное с помощью атомных часов, постоянно связанных с телом, называют **собственным временем** для данного материального тела.

Определим дифференциал собственного времени $d\tau$. Атомные часы измеряют (разделенный на c) интервал. Следовательно,

$$d\tau = \frac{1}{c}ds = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dl^2} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $v(t)$ — скорость материального тела в системе K в момент t . Конечный промежуток собственного

времени получается отсюда интегрированием

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}.$$

Поскольку $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq 1$, то $\Delta\tau$ всегда $\leq \Delta t$, т. е.: собственное время всегда течет *не быстрее*, чем координатное время в какой-либо системе отсчета. Этот эффект носит название **эйнштейновского замедления времени**.

2.4 Преобразования Лоренца

В геометрической интерпретации Минковского переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой соответствует преобразование координат в псевдоевклидовом 4-пространстве, оставляющее инвариантным «расстояние»:

$$-s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2.$$

Найдем явный вид этих преобразований.

Будем для сокращения обозначать пространственные координаты x, y, z одной буквой x с индексами 1,2,3, соответственно, а вместо времени t введем четвертую *чисто мнимую* координату $x_4 = ict$, так что выражение для интервала примет формально евклидов

$$-s^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2. \quad (20)$$

Тогда линейные преобразования, оставляющие инвариантным (20) и затрагивающие только координаты $x_1 = x$ и $x_4 = ict$, запишутся ψ — параметр поворота

$$x_1 = \cos \psi x'_1 - \sin \psi x'_4, \quad x_4 = \sin \psi x'_1 + \cos \psi x'_4.$$

Чтобы выяснить его физический смысл, будем считать, что рассматриваемый поворот соответствует переходу от некоторой инерциальной системы отсчета K к другой инерциальной системе K' , движущейся относительно K вдоль оси x с (постоянной!) скоростью V . Тогда движение материальной точки, имеющей в K' во все моменты «времени» x_4 постоянную координату $x'_1 = 0$, должно изображаться в системе K уравнением $x = Vt$, т. е. $x_1 = \frac{V}{ic} x_4$. Из выписанных же формул мы получаем $\frac{x_1}{x_4} = -\operatorname{tg} \psi$. Следовательно, угол ψ «евклидова поворота» оказывается чисто мнимым, причем

$$\operatorname{tg} \psi = i \frac{V}{c}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \sin \psi = \frac{i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

В результате мы приходим к специальным преобразованиям Лоренца (голландского физика Генриха Антуана Лоренца)

$$x_1 = \frac{x'_1 - i\frac{V}{c}x'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{x'_4 + i\frac{V}{c}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (21)$$

Переписанное через настоящее время специальное преобразование Лоренца будет выглядеть как

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (22)$$

Если перейти в преобразовании Лоренца к случаю скоростей V , малых по сравнению со скоростью света, выполняя формальный предельный переход $c \rightarrow \infty$, то мы получим из (22)

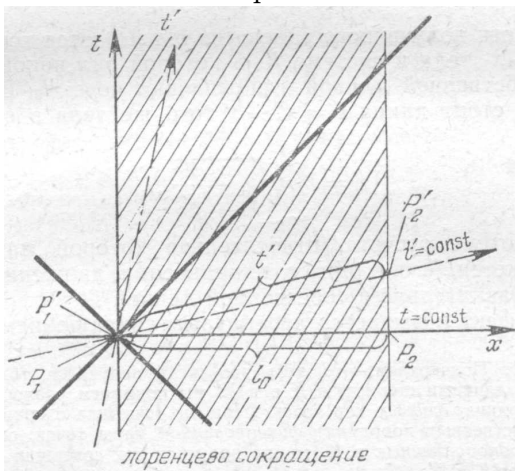
$$x_1 = x'_1 + Vt, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad t = t'$$

хорошо знакомое преобразование Галилея.

Таким образом, для кинематики теории относительности выполняется **принцип соответствия**: в той области физических явлений, в которой все скорости малы по сравнению со скоростью света, релятивистское описание совпадает с описанием классической механики. Преобразования Лоренца (22) определяют все кинематические соотношения к теории относительности. Рассмотрим два важных их применения.

2.4.1 Лоренцево сокращение

Пусть в системе K расположено некоторое неподвижное твердое тело — по историческим причинам обычно говорят о «стержне» или «масштабе», — длина которого (в направлении x) есть l_0 . Какую длину припишет тому же телу наблюдатель, проводящий измерения в системе K' , движущейся относительно K со скоростью V ?



В мире Минковского неподвижное в K тело изобразится полосой, ограниченной мировыми линиями его концов — прямыми, параллельными оси t . Под **длиной** тела мы понимаем разность пространственных координат x *одновременных друг другу* 4-точек этих мировых линий.

Поскольку, однако, одновременность зависит от системы отсчета, то оказывается, что под длинами тела в разных системах K и K' мы понимаем разность пространственных координат *разных* пар 4-точек: на нашем чертеже это будут 4-точки P_1 и P_2 в системе K и 4-точки P'_1 и P'_2 в системе

K' , причем пара (P_1, P_2) имеет одинаковую координату t , пара (P'_1, P'_2) — одинаковую координату t' , а пары (P_1, P'_1) и (P_2, P'_2) — соответственно одинаковые координаты x : $x = x_1$ и $x = x_2$. Выразим с помощью (22) пространственные координаты 4-точек P'_1 и P'_2 в системе k через их координаты в K' :

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

и вычтем эти выражения друг из друга

$$x_1 - x_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

В левой части полученного равенства оказывается тогда как раз длина $x_2 - x_1$, тела в системе K , в которой она покоится; ее называют **собственной длиной** и обозначают через l_0 . В числителе же правой стоит длина $l' = x'_1 - x'_2$ того же тела в системе K' . Итак,

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (23)$$

то есть — в той системе отсчета, относительно которой материальное тело движется, его длина в направлении движения l сокращается сравнительно с собственной длиной l_0 . Этот эффект называется **лоренцевым сокращением длины** (сокращение **Фицджеральда**).

Поскольку поперечные (к направлению движения) измерения тела не затрагиваются преобразованием (22), то его объем Ω в движущейся системе сокращается по тому же закону (23):

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

2.4.2 Сложение скоростей

В качестве второго важного примера применения преобразований Лоренца выясним, с какой скоростью v будет двигаться относительно системы K материальное тело, которое движется со скоростью v' относительно системы K' , в свою очередь движущейся относительно K со скоростью V . Напомним, что классические преобразования Галилея приводили к простому ответу

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (24)$$

на этот вопрос; теперь такой результат явно невозможен, так как при сложении двух скоростей $\frac{c}{2} < v', V < c$ он приводил бы к $v > c$.

Перепишем преобразование (22) для дифференциалов и поделим почленно первые три равенства на четвертое. Вспоминая определение скорости как производной координаты по времени, получим тогда

$$v_1 = \frac{v'_1 + V}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{v'_2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}, \quad v_3 = \frac{v'_3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_1}{c^2}}$$

Мы видим таким образом, что — в отличие от координат — при переходе к другой системе отсчета преобразуются не только составляющая v_1 скорости по оси x_1 но и составляющие v_2 и v_3 , и притом различным способом. Поэтому чтобы переписать полученные формулы в векторном виде, приходится выделять у $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ продольные (вдоль $\vec{V}$) и поперечные составляющие:

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}}, \quad \vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp}}{1 + \frac{\vec{V}\vec{v}'}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}}. \quad (25)$$

Это и есть искомый релятивистский закон сложения скоростей, заменяющий простое галилеево правило (24).

Если обе складываемые скорости $\vec{v}'$ и $\vec{V}$ параллельны друг другу, то закон (25), который можно записать тогда в скалярной форме, значительно упрощается:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

В частности, из него видно, что если обе складываемые скорости меньше скорости света, то такой же будет и результирующая скорость v . В случае непараллельных скоростей $\vec{v}'$ и $\vec{V}$ обе эти скорости входят в (25) несимметрично. Это значит, что результат сложения двух скоростей в теории относительности зависит от порядка. Поскольку всякую скорость (меньшую c !) можно рассматривать как параметр преобразования Лоренца от одной инерциальной системы к другой, то отсюда следует, что и результат двух последовательных специальных преобразований Лоренца, выполняемых в несовпадающих плоскостях, зависит от порядка их выполнения.

2.5 Экспериментальное подтверждение следствий из преобразований Лоренца

Продолжительность жизни μ -мезонов

В 1936 г. физиком Юкава при исследовании сил ядерного взаимодействия были предсказаны частицы вещества, названные впоследствии μ -мезонами. По предположениям, они должны были быть нестабильными и иметь массу в 200 раз большую массы электрона. Через два года Андерсон и Неддермейер обнаружили эти частицы в составе космических лучей. Многочисленные опыты позволили установить их массу, она оказалась равной 206,7 электронной массы. Была определена и продолжительность их жизни τ . Но в измерении продолжительности жизни μ -мезонов возникли противоречия: время жизни μ -мезона, измеренное при движении его с большой скоростью на высоте между 1620–3250 м над уровнем моря, оказалось больше, чем время жизни, предсказанное теоретически по периоду β -распада ядер; первое τ равно $2.8 \cdot 10^{-6}$ с, второе $\tau_{\text{теор}} 2.15 \cdot 10^{-6}$ с. На помощь пришла специальная теория относительности. Подставляя вместо $dt = 2.8 \cdot 10^{-6}$ с., а

вместо $d\tau = 2.15 \cdot 10^{-6}$ с. и учитывая скорость движения μ -мезона, получим нужное равенство. Позже были поставлены опыты по определению времени жизни медленного μ -мезона, измерения дали результат, близкий к предсказанному. Оказалось, что $\tau_{\text{теор}}$ равно времени жизни τ_0 μ -мезона, покоящегося относительно лаборатории, а измеренная над уровнем моря продолжительность жизни τ относится к μ -мезону, движущемуся относительно лаборатории. Так была подтверждена формула $\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \text{invariant}$.

Эффект Доплера

Явление и эффект Доплера, известный в оптике и являющийся опытным фактом, прекрасно объясняется специальной теорией относительности.

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \quad (26)$$

В полученной формуле скорость V системы K относительно системы K' следует рассматривать как скорость движения относительно друг друга источника света и оптического прибора или просто фотопластинки. Частота света ν , падающего на фотопластинку, отлична от частоты света ν' , испускаемого источником; она зависит от скорости относительного движения и угла, под которым пучок света падает на фотопластинку.

При малых скоростях, когда $V \ll c$, из формулы (26) получим известный в оптике эффект Доплера $\nu' = \nu \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)$, если источник света и прибор удаляются друг от друга, и $\nu' = \nu \left(1 + \frac{V}{c} \cos \theta\right)$, если они сближаются.

При больших скоростях из формулы (26) вытекают два существенных частных случая релятивистского эффекта Доплера.

1. Продольный эффект Доплера, который получается при $\cos \theta = 1$, когда источник и прибор сближаются:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}, \quad (\nu > \nu'), \quad (27)$$

и при $\cos \theta = -1$, когда источник и прибор удаляются друг от друга:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}, \quad (\nu < \nu'). \quad (28)$$

Из релятивистского продольного эффекта (27) и (28) при малых скоростях получается классический эффект, который также является продольным $\nu \approx \nu' \left(1 + \frac{V}{c}\right)$.

2. Поперечный эффект Доплера получится из формулы (26) при $\theta = \frac{\pi}{2}$, т.е. когда источник и прибор движутся мимо друг друга:

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Из классической формулы в этом случае получим $\nu = \nu'$, т. е. не следует поперечного эффекта.

Поперечный эффект относится к эффектам второго порядка малости по $\frac{V}{c}$; он мал по сравнению с продольным, относящимся к эффектам первого порядка. Для наблюдения поперечного эффекта требуется более совершенный физический эксперимент. Впервые он наблюдался в 1938 г. физиком Айвсом при исследовании излучения атомов водорода в анодных лучах.

Наблюдение эффекта Доплера подтверждает релятивистский эффект замедления времени в движущихся системах отсчета.

Опыты с эффектом Мёссбауэра

Предположим, что часы B , синхронно идущие с часами A в системе K , пришли в движение и через некоторое время возвратились в исходную точку. Имея теперь в виду, что $v = v(t)$ получим время часов B в системе K от начала до конца движения

$$\Delta t_B = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt, \quad (29)$$

которое меньше, чем время покоящихся часов A . Заметим, что часы B за время движения испытали ускорение и замедление, так что здесь имеет место «парадокс часов».

В последние годы значительно повысилась точность определения времени протекания физических процессов, что позволило опытным путем проверить формулу (29), согласно которой часы, испытывающие ускорение, имеют замедленный ход и замедление времени, показанное в уравнении (29), определяется средним значением квадрата скорости за время движения, когда $v \ll c$. Опытная проверка уравнения (29) позволяет подтвердить теоретические выводы о привилегированности инерциальных систем в пространстве–времени, так как в инерциальных системах этот парадокс отсутствует. Вместе с этим опытным путем устанавливается, что неинерциальность систем отсчета может быть обнаружена не только при помощи прибора, измеряющего ускорение, но также и по характерному для данной системы ходу часов. Как показал Айве, наиболее быстро идущим часам из их множества, совершающим различные относительные движения, соответствует наименьшее среднее значение скорости в некоторой инерциальной системе. Это позволило указать новый способ определения скорости, не прибегая к определению расстояния, проходимого часами, или кинетической энергии и массы. Суть этого нового метода состоит в сопоставлении показаний времени двух часов,

одни из которых покоятся, а другие движутся и проходят дважды точку, где покоятся первые. Тогда, зная время покоящихся часов $t_2 - t_1$ и время движущихся часов $t'_2 - t'_1$ пользуясь уравнением (29), можно определить v^2 , которая стоит под корнем. Такие опыты стали возможными благодаря открытому эффекту Мёссбауэра.

В 1958 г. Мёссбауэр нашел способ получения γ -фотонов с энергией, равной энергии резонансного поглощения. Это получило название эффекта Мёссбауэра.

В температурном сдвиге резонансной линии в эффекте Мёссбауэра роль часов играют ядра Fe^{57} . При комнатной температуре эти ядра в кристаллической решетке имеют среднюю квадратичную скорость порядка $3 \cdot 10^2$ м/с. Фотоны, посылаемые от источника к поглотителю, несут временную информацию между ядрами. Опыт с эффектом Мёссбауэра показал, что Δt действительно зависит от среднеквадратичной скорости.

Опыты Хейя и других физиков были поставлены для подтверждения выводов о зависимости времени от ускорения. Опыты показывают, что интенсивность γ -лучей увеличивается при увеличении ускорения, что и является следствием смещения в сторону уменьшения резонансной частоты поглотителя Fe^{57} , благодаря чему ядра поглощают γ -фотоны, возбуждаются и затем сами их испускают.

В этих опытах снова подтверждается поперечный эффект Доплера, а также влияние ускорения — парадокс часов, но зависимость частоты от ускорения значительно меньше, чем от скорости.

Аберрация звезд

Если в течение года ось телескопа ориентировать на какую-либо звезду так, чтобы она все время была в поле зрения, то на фотопластинке, куда попадает излучение звезды, останется след в виде эллипса. Это происходит потому, что ось телескопа все время изменяет направление в пространстве, смещаясь на некоторый угол от линии, соединяющей неподвижную точку на оси телескопа и звезду. А так как телескоп вместе с Землей движется вокруг Солнца по эллипсу, то объектив и окуляр телескопа описывают эллипс, который виден из неподвижной точки на оси телескопа под углом $41''$. Это явление аберрации звезд было открыто Бродлеем в XVIII в. Угол, который составляет ось телескопа с направлением на звезду, называется углом аберрации и равен $20,5''$. Аберрация звезд опровергает гипотезу «увлечения эфира», но находится в согласии со специальным принципом относительности ($\sin \alpha = \frac{V}{c}$, α — угол аберрации, V — скорость движения звезды.).

2.6 Импульс, масса и энергия

Импульс — это величина, закон сохранения которой сводится к правилу «смешивания» скоростей при полностью неупругом столкновении. Вычисляя скорость как отношение (координатного) пути к (координатному) времени, мы обнаружим, что масса зависит от скорости. Эта масса является

компонентой импульса в направлении времени. Запишем

$$P = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(\frac{V}{c}, 1 \right),$$

где m_0 — масса объекта в сопутствующей инерциальной системе, т. е. в системе покоя объекта. Она называется **массой покоя**. Согласно Минковскому, квадрат модуля импульса есть

$$|P|^2 = m_0^2 c^2. \quad (30)$$

В соответствии с этой конструкцией численное значение массы покоя не зависит от инерциальной системы, в которой измеряется объект, и не зависит от скорости объекта.

Разлагая временную компоненту импульса по скоростям, получим

$$mc = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m_0 c \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} + \dots \right) = \frac{1}{c} \left(m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} V^2 + \dots \right).$$

Для малых скоростей временная компонента импульса с точностью до постоянной суммирования пропорциональна кинетической энергии объекта, так что в этом случае можно записать

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} V^2 = E_0 + E_{\text{кин}}.$$

Справедлива ли эта формула для больших скоростей? Если не опираться на формулу $E_{\text{кин}} = \frac{m}{2} V^2$, а определять кинетическую энергию как работу, которую нужно совершить над объектом, чтобы вывести его из состояния покоя (в заданной инерциальной системе) и разогнать до скорости V , то для произвольных скоростей имеет место равенство

$$E_{\text{кин}} = mc^2 - m_0 c^2. \quad (31)$$

Является ли $E_0 = m_0 c^2$ просто константой или E_0 описывает энергию, которая может превратиться в кинетическую энергию? Говоря о взаимном превращении форм энергии, мы приходим к закону сохранения энергии, который исходит из сохранения энергии при упругом столкновении. В ньютоновской механике мы наблюдаем неупругое столкновение, при котором кинетическая энергия соударяющихся тел уменьшается. Но мы можем установить механический эквивалент теплоты, т. е. сказать, что чисто кинетическая энергия превращается в тепловую, т. е. обобщенную внутреннюю энергию. Но закон сохранения для четвертой компоненты импульса, который содержится в правиле смешивания скоростей, означает, что *Сумма кинетических энергий + Сумма членов $E_0 = \text{const}$* . Поэтому член E_0 должен содержать внутреннюю энергию объекта; E_0 называется **энергией покоя**.

Согласно выражению (30), частицы, движущиеся со скоростью света, имеют нулевую массу покоя. Такими частицами являются кванты электромагнитного поля - фотоны, которые ради более

наглядного представления эйнштейновской кинематики могут пониматься и как волновые пакеты света. Для них справедливо соотношение *Модуль p пространственной компоненты импульса = временной компоненте импульса*. Экспериментально обнаруживается, что энергия этих частиц пропорциональна импульсу и что для них выполняется равенство $E = p \cdot c$. Для этих же частиц временная компонента пропорциональна полной энергии, которая в данном случае является чисто кинетической. Таким образом, мы имеем право написать, что полная энергия равна

$$E = mc^2 \quad (32)$$

Подтверждением того, что полная энергия частиц действительно может перейти в кинетическую энергию, служат реакции столкновения элементарных частиц, в результате которых образуются только частицы с нулевой массой покоя, т. е. частицы, движущиеся со скоростью света.

Формула (31) выражает зависимость инертной массы от скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Формула (32) — выдающийся результат частной теории относительности. Она означает, что закон сохранения энергии является частью закона сохранения импульса и содержится в правиле смешивания скоростей. В ньютоновской механике это не так. Там массы не изменяются, и, естественно, не выполняется закон сохранения механической энергии: механическая энергия при неупругих ударах теряется, и необходимы дополнительные теоретические построения, чтобы можно было сохранить сам закон сохранения для неупругих столкновений. В частной теории относительности закон сохранения инертной массы идентичен закону сохранения энергии. Каждый вид энергии имеет инертную массу, и коэффициент пропорциональности равен c^2 . Укажем еще раз на различие между инертной массой и массой покоя. Инертная масса является множителем между импульсом и координатной скоростью V ; напротив, масса покоя является инертной массой только в сопутствующей инерциальной системе. Таким образом, масса покоя не зависит от инерциальной системы и от скорости объекта в ней, а инертная масса зависит от скорости. Частица, движущаяся со скоростью света, не имеет массы покоя. Нет такой инерциальной системы, в которой эта частица покоилась бы. Свойство двигаться со скоростью света не зависит от инерциальной системы. Это предположение лежит в основе частнорелятивистской кинематики. Однако такая частица обладает инертной массой, которая соответствует присущей этой частице энергии.

Формула (32) отнюдь не означает, что энергия может превращаться в массу и наоборот. Полная энергия и полная масса всегда сохраняются. Превращаться друг в друга могут энергия покоя (и, следовательно, масса покоя) и кинетическая энергия.

3 Электродинамика

3.1 Векторный анализ

Векторный анализ — раздел математики, распространяющий методы математического анализа на векторы в двух или более измерениях. Объектами приложения векторного анализа являются:

1. векторные поля — отображения одного векторного пространства в другое;
2. скалярные поля — функции на векторном пространстве.

Наибольшее применение векторный анализ находит в физике и инженерии. Основные преимущества векторных методов перед традиционными координатными:

1. *Компактность.* Одно векторное уравнение объединяет несколько координатных, и его исследование чаще всего можно проводить непосредственно, не заменяя векторы на их координатную запись.
2. *Инвариантность.* Векторное уравнение не зависит от системы координат и без труда переводится в координатную запись в любой удобной системе координат.
3. *Наглядность.* Дифференциальные операторы векторного анализа и связывающие их соотношения обычно имеют простое и наглядное физическое истолкование.

Наиболее часто применяемые векторные операторы:

1. **ротор** и **дивергенция** — для векторных полей.
2. **градиент** и **лапласиан** — для скалярных полей.

3.1.1 Оператор набла

Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом $\vec{\nabla}$. Для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольных декартовых координатах оператор набла определяется следующим образом:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные орты для осей x , y , z , соответственно.

Через оператор набла естественным способом выражаются основные операции векторного анализа: grad (*градиент*), div (*дивергенция*), rot (*ротор*), а также оператор Лапласа.

Этот вектор приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, к которой он применяется.

Если умножить вектор $\vec{\nabla}$ на скаляр φ , то получится вектор

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

который представляет собой *градиент* функции φ .

Если вектор $\vec{\nabla}$ скалярно умножить на вектор $\vec{a}$, получится скаляр

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \equiv (\vec{\nabla}, \vec{a}) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

то есть *дивергенция* вектора $\vec{a}$.

Если $\vec{\nabla}$ умножить на $\vec{a}$ векторно, то получится *ротор* вектора:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{a}] = (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\vec{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\vec{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\vec{k}.$$

Соответственно, скалярное произведение $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$ есть скалярный оператор, называемый *оператором Лапласа*. Последний обозначается также Δ . В декартовых координатах оператор Лапласа определяется следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поскольку оператор набла является дифференциальным оператором, то при преобразовании выражений необходимо учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференцирования. Например:

$$\text{grad}(\psi\phi) = \vec{\nabla}(\psi\phi) = \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi,$$

то есть производная выражения, зависящего от двух полей, есть сумма выражений, в каждом из которых дифференцированию подвергается только одно поле.

3.1.2 Дивергенция

Дивергенция — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное (то есть операция дифференцирования, в результате применения которой к векторному полю получается скалярное поле), который определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле» (точнее — насколько расходятся входящий и исходящий поток).

Можно дать короткое определение дивергенции — это дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность малой окрестности каждой внутренней точки области определения поля. Оператор дивергенции, применённый к полю $\vec{F}$, обозначают как $\text{div } \vec{F}$ или $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

Определение дивергенции выглядит так:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_F}{V},$$

где Φ_F — поток векторного поля $\vec{F}$ через сферическую поверхность площадью S , ограничивающую объём V . Ещё более общим, а потому удобным в применении, является определение, когда форма области с поверхностью S и объёмом V допускается любой. Единственным требованием является её нахождение внутри сферы радиусом, стремящимся к нулю.

Допустим, что векторное поле дифференцируемо в некоторой области. Тогда в трёхмерном декартовом пространстве дивергенция будет определяться выражением

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

С точки зрения физики, дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или стоком этого поля:

- $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ — точка поля является источником;
- $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ — точка поля является стоком;
- $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Например, если в качестве векторного поля взять совокупность направлений наискорейшего спуска на земной поверхности, то дивергенция покажет местоположение вершин и впадин, причём на вершинах дивергенция будет положительна (направления спуска расходятся от вершин), а на впадинах отрицательная (ко впадинам направления спуска сходятся).

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

1. Линейность: для любых векторных полей $\vec{F}$ и $\vec{G}$ и для всех действительных чисел a и b

$$\operatorname{div}(a\vec{F} + b\vec{G}) = a \operatorname{div} \vec{F} + b \operatorname{div} \vec{G}.$$

2. Если φ — скалярное поле, а $\vec{F}$ — векторное, тогда $\operatorname{div}(\varphi\vec{F}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{F} + \varphi \operatorname{div} \vec{F}$.
3. Свойство, связывающее векторные поля $\vec{F}$ и $\vec{G}$, заданные в трёхмерном пространстве, с *потом*: $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$.
4. Дивергенция от градиента есть лапласиан:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\psi = \vec{\nabla}^2 \psi = \Delta \psi.$$

5. Дивергенция от ротора: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

3.1.3 Ротор

Ротор, или **вихрь** — векторный дифференциальный оператор над векторным полем. Показывает, насколько и в каком направлении закручено поле в каждой точке. Ротор поля $\vec{F}$ обозначается символом $\text{rot } \vec{F}$ (в русскоязычной литературе) или $\text{curl } \vec{F}$ (в англоязычной литературе), а также $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ через оператор набла.

Ротор векторного поля — вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру L плоской площадки ΔS , перпендикулярной к этому направлению, к величине этой площадки, когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку:

$$\text{rot}_{\vec{n}} \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r}}{\Delta S}.$$

Нормаль $\vec{n}$ к площадке направлена так, чтобы при вычислении циркуляции обход по контуру L совершался против часовой стрелки.

В трёхмерной декартовой системе координат $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ вычисляется следующим образом:

$$\text{rot}(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Для удобства запоминания можно условно представлять ротор как векторное произведение:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Векторное поле, ротор которого равен нулю в любой точке, называется потенциальным (безвихревым).

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

1. Линейность: для любых векторных полей $\vec{F}$ и $\vec{G}$ и для всех действительных чисел a и b

$$\text{rot}(a\vec{F} + b\vec{G}) = a \text{rot } \vec{F} + b \text{rot } \vec{G}.$$

2. Если φ — скалярное поле, а $\vec{F}$ — векторное, то $\text{rot}(\varphi \vec{F}) = \text{grad } \varphi \times \vec{F} + \varphi \text{rot } \vec{F}$.
3. Дивергенция ротора равна нулю $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$. При этом верно и обратное: если поле $\vec{F}$ бездивергентно ($\text{div } \vec{F} = 0$), оно есть поле вихря некоторого поля $\vec{G}$ (векторный потенциал) $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$.
4. Если поле $\vec{F}$ потенциально ($\vec{F} = \text{grad } \varphi$), его ротор равен нулю (поле $\vec{F}$ — безвихревое) ($\text{rot } \vec{F} = 0$). Верно и обратное: если поле безвихревое ($\text{rot } \vec{F} = 0$), то оно потенциально ($\vec{F} = \text{grad } \varphi$) для некоторого скалярного поля φ .

5. **Теорема Стокса:** циркуляция вектора по замкнутому контуру, являющемуся границей некоторой поверхности, равна потоку ротора этого вектора через эту поверхность

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

3.1.4 Градиент

Градиент — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. В математике, градиент функции f это вектор, который указывает направление наискорейшего роста этой функции, и чей модуль равен скорости ее изменения в этом направлении.

Для случая трёхмерного пространства, градиентом называется векторная функция с компонентами $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, где φ — некоторая скалярная функция координат x, y, z .

Градиент обозначается $\text{grad } \varphi$ или, с использованием оператора набла, $\vec{\nabla} \varphi$. Из определения градиента следует, что:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Смысл градиента любой скалярной функции f в том, что его скалярное произведение с бесконечно малым вектором перемещения $d\vec{x}$ дает **полный дифференциал** этой функции при соответствующем изменении координат в пространстве, на котором определена f , то есть линейную (в случае общего положения она же главная) часть изменения f при смещении на $d\vec{x}$. Применяя одну и ту же букву для обозначения функции от вектора и соответствующей функции от его координат, можно написать:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = (\text{grad } f \cdot d\vec{x})$$

В различных отраслях физики используется понятие градиента различных физических полей. Например, *градиент концентрации* — нарастание или уменьшение по какому-либо направлению концентрации растворённого вещества, *градиент температуры* — увеличение или уменьшение по направлению температуры среды и т. д. Градиент может быть вызван различными причинами, например, механическим препятствием, действием электромагнитных, гравитационных или других полей или различием в растворяющей способности граничащих фаз.

3.1.5 Оператор Лапласа

Оператор Лапласа (лапласиан) — дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом Δ . Функции F он ставит в соответствие функцию $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F$.

Оператор Лапласа эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции: $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, таким образом значение оператора Лапласа в точке может быть истолковано как плотность источников (стоков) потенциального векторного поля $\operatorname{grad} F$ в этой точке. В декартовой системе координат оператор Лапласа часто обозначается следующим образом $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$, то есть в виде скалярного произведения оператора набла на себя.

С помощью данного оператора удобно записывать уравнения Лапласа, Пуассона и волновое уравнение. В физике оператор Лапласа применим в электростатике и электродинамике, во многих уравнениях физики сплошных сред, а также при изучении равновесия мембран, плёнок или поверхностей раздела фаз с поверхностным натяжением, в стационарных задач диффузии и теплопроводности, которые сводятся к обычным уравнениям Лапласа или Пуассона или к некоторым их обобщениям.

4 Квантовая механика

4.1 Фотоэлектрический эффект 1899

Под воздействием фотонов металл может испускать электроны.

Выбивание светом электронов с поверхности токопроводящих материалов - явление, широко используемое сегодня в повседневной жизни. Например, некоторые системы сигнализации работают за счет передачи видимых или инфракрасных световых лучей на фотоэлектрический элемент, из которого выбиваются электроны, обеспечивающие электропроводность цепи, в которую он включен. Если на пути светового луча появляется препятствие, свет на датчик поступать перестает, поток электронов прекращается, цепь разрывается — и срабатывает электронная сигнализация.

Это явление, получившее название фотоэффекта, было открыто в конце XIX столетия и сразу поставило целый ряд фундаментальных вопросов, поскольку ничего из того, что было известно ученым о строении металлов или природе света, фотоэффекта не объясняло. Нельзя сказать, что классическая теория запрещала бы свету выбивать электроны из металла. Электромагнитные волны, по идее, могли «вымывать» электроны из металла подобно тому, как морские волны выносят на поверхность и постепенно прибывают к берегу легкие пробковые крошки. Однако проблема состояла в том, что столь простым объяснением в случае фотоэффекта ограничиться было невозможно. Во-первых, электроны появлялись практически мгновенно после начала облучения. Во-вторых, фотоэффект возникал даже под воздействием самых слабых световых лучей, причем по мере повышения интенсивности облучения энергия высвобождаемых электронов не изменялась. И то, и другое вступало в явное противоречие с классической картиной взаимодействия света с электронами.

Проблему в конце концов удалось решить в начале XX века Альберту Эйнштейну, причем сделанные им выводы дали мощный толчок развитию квантовой механики. Незадолго до этого Макс Планк показал, что излучение черного тела можно адекватно описать, приняв за допущение, что атомы излучают и поглощают свет фиксированными энергетическими порциями - квантами. Он полагал, что этот феномен каким-то образом обусловлен внутренним строением атомов, но отнюдь не природой света. Однако Эйнштейн воспринял идею Планка гораздо серьезнее и постулировал, что сам свет распространяется дискретными пучками энергии, которые он назвал фотонами. Иногда фотоны ведут себя подобно частицам, иногда - подобно волнам. В частности, при взаимодействии с электроном фотон может вести себя как частица, и буквально выбивать электрон из атома (это соударение фотона с атомом можно уподобить столкновению двух бильярдных шаров). Причем для выбивания электрона при таком соударении достаточно единственного фотона. Далее, повышение интенсивности света приводит к увеличению числа фотонов (и, следовательно, числа выбитых электронов), но не энергии отдельно взятого фотона. Следовательно, и энергия, и скорость отдельно

взятого выбитого фотоэлектрона не зависят от интенсивности света — но только от его частоты.

Рассуждая таким образом, Эйнштейн вывел следующее простое уравнение для описание энергии фотоэлектронов:

$$E = h\nu - A,$$

где ν — частота падающего света, h — постоянная Планка, а A — так называемая «работа выхода», то есть минимальная энергия, необходимая для того, чтобы выбить электрон из атома металла.

4.2 Постоянная Планка 1900

Постоянная Планка определяет границу между макромиром, где действуют законы механики Ньютона, и микромиром, где действуют законы квантовой механики.

Макс Планк — один из основоположников квантовой механики — пришел к идеям квантования энергии, пытаясь теоретически объяснить процесс взаимодействия между недавно открытыми электромагнитными волнами и атомами и, тем самым, разрешить проблему излучения черного тела. Он понял, что для объяснения наблюдаемого спектра излучения атомов нужно принять за данность, что атомы излучают и поглощают энергию порциями (которые ученый назвал квантами) и лишь на отдельных волновых частотах. Энергия, переносимая одним квантом, равна:

$$E = h\nu,$$

где ν — частота излучения, а h — элементарный квант действия, представляющий собой новую универсальную константу, получившую вскоре название постоянная Планка. Планк же первым и рассчитал ее значение на основе экспериментальных данных $h = 6,548 \cdot 10^{-34}$ Дж·с (в системе СИ); по современным данным $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Соответственно, любой атом может излучать широкий спектр связанных между собой дискретных частот, который зависит от орбит электронов в составе атома. Вскоре Нильс Бор создаст стройную, хотя и упрощенную модель атома Бора, согласующуюся с распределением Планка.

Опубликовав свои результаты в конце 1900 года, сам Планк сначала не верил в то, что кванты — физическая реальность, а не удобная математическая модель. Однако, когда пять лет спустя Альберт Эйнштейн опубликовал статью, объясняющую фотоэлектрический эффект на основе квантования энергии излучения, в научных кругах формулу Планка стали воспринимать уже не как теоретическую игру, а как описание реального физического явления на субатомном уровне, доказывающее квантовую природу энергии.

Постоянная Планка фигурирует во всех уравнениях и формулах квантовой механики. Она, в частности, определяет масштабы, начиная с которых вступает в силу принцип неопределенности

Гейзенберга. Грубо говоря, постоянная Планка указывает нам нижний предел пространственных величин, после которого нельзя не принимать во внимание квантовые эффекты. Для песчинок, скажем, неопределенность произведения их линейного размера на скорость настолько незначительна, что ею можно пренебречь. Иными словами, постоянная Планка проводит границу между макромиром, где действуют законы механики Ньютона, и микромиром, где вступают в силу законы квантовой механики. Будучи получена всего лишь для теоретического описания единичного физического явления, постоянная Планка вскоре стала одной из фундаментальных констант теоретической физики, определяемых самой природой мироздания.

4.3 Атом Бора 1913

Электроны в атоме могут находиться только на разрешенных орбитах.

Когда Джон Дальтон впервые в истории современной науки предложил атомную теорию строения вещества, атомы представлялись ему неделимыми, наподобие микроскопических бильярдных шаров. Однако на протяжении всего XIX столетия становилось всё очевиднее, что такая модель неприемлема. Поворотной точкой стало открытие электрона Дж. Дж. Томсоном в 1897 году, из которого следовало, что атом состоит из отдельных частиц — прямое свидетельство против его неделимости. Последним гвоздем в крышку гроба неделимого атома стало открытие в 1911 году атомного ядра. После этих открытий стало ясно, что атом не просто делим, но что он еще и обладает дискретной структурой: состоит из массивного, положительно заряженного центрального ядра и движущихся по орбитам вокруг него легких, отрицательно заряженных электронов.

Но с этой простой планетарной моделью атома тут же возникли проблемы. Прежде всего, согласно физическим законам того времени, такой атом не мог бы просуществовать дольше доли мгновения — на наше счастье, мы имеем все основания утверждать, что этот факт опытом не подтверждается. Аргументация была такова: в соответствии с законами механики Ньютона, электрон, находящийся на орбите, движется с ускорением. Следовательно, согласно уравнениям Максвелла, он должен излучать электромагнитные волны и, как следствие, терять энергию и вскоре сойти с орбиты и упасть на ядро.

Разрешить эту проблему и направить физиков по верному пути понимания атомной структуры удалось молодому датскому теоретику Нильсу Бору, недавно прибывшему на стажировку в Англию после защиты докторской диссертации у себя на родине. За отправную точку Бор принял новые постулаты квантовой механики, согласно которым на субатомном уровне энергия испускается исключительно порциями, которые получили название «кванты». Немецкий физик Макс Планк воспользовался положением о том, что атомы излучают свет отдельными частицами (позже Альберт

Эйнштейн назвал их «фотоны»), для разрешения застарелой проблемы излучения черного тела. Используя концепцию фотонов, Альберт Эйнштейн теоретически объяснил фотоэлектрический эффект. За свои работы и Планк, и Эйнштейн получили по Нобелевской премии.

Бор развил квантовую теорию еще на шаг и применил ее к состоянию электронов на атомных орбитах. Говоря научным языком, он предположил, что угловой момент электрона квантуется. Далее он показал, что в этом случае электрон не может находиться на произвольном удалении от атомного ядра, а может быть лишь на ряде фиксированных орбит, получивших название «разрешенные орбиты». Электроны, находящиеся на таких орбитах, не могут излучать электромагнитные волны произвольной интенсивности и частоты, иначе им, скорее всего, пришлось бы перейти на более низкую, неразрешенную орбиту. Поэтому они и удерживаются на своей более высокой орбите, подобно самолету в аэропорту отправления, когда аэропорт назначения закрыт по причине нелетной погоды.

Однако электроны могут переходить на другую разрешенную орбиту. Как и большинство явлений в мире квантовой механики, этот процесс не так просто представить наглядно. Электрон просто исчезает с одной орбиты и материализуется на другой, не пересекая пространства между ними. Этот эффект называли «квантовым прыжком», или «квантовым скачком». Если электрон перескакивает на более низкую орбиту, он теряет энергию и, соответственно, испускает квант света — фотон фиксированной энергии с фиксированной длиной волны. На глаз мы различаем фотоны разных энергий по цвету — раскаленная на огне медная проволока светится синим, а натриевая лампа уличного освещения — желтым. Для перехода на более высокую орбиту электрон должен, соответственно, поглотить фотон.

В картине атома по Бору, таким образом, электроны переходят вниз и вверх по орбитам дискретными скачками — с одной разрешенной орбиты на другую, подобно тому, как мы поднимаемся и спускаемся по ступеням лестницы. Каждый скачок обязательно сопровождается испусканием или поглощением кванта энергии электромагнитного излучения, который мы называем фотоном.

Со временем интуитивная гипотеза Бора уступила место строгой систематической формулировке в рамках законов квантовой механики и, в частности, концепции двойственной природы элементарных частиц — корпускулярно-волновой. Сегодня электроны представляются нам не микроскопическими планетами, обращающимися вокруг атомного ядра, а волнами вероятности, плещущимися внутри своих орбит - подобно приливам и отливам в тороидальном бассейне - и подчиняющимися уравнению Шрёдингера. Современные физики, как само собой разумеющееся, рассчитывают характеристики этих волн для самых сложных по структуре атомов и используют их для объяснения свойств и поведения этих атомов. Однако основополагающую картину всей современной квантовой механики нарисовал в своем великом прозрении Нильс Бор - в далеком теперь 1913 году.

4.4 Соотношение де Бройля 1924

Длина волны квантовой частицы обратно пропорциональна ее импульсу.

Один из фактов субатомного мира заключается в том, что его объекты — такие как электроны или фотоны - совсем не похожи на привычные объекты макромира. Они ведут себя и не как частицы, и не как волны, а как совершенно особые образования, проявляющие и волновые, и корпускулярные свойства в зависимости от обстоятельств. Одно дело - это заявить, и совсем другое - связать воедино волновые и корпускулярные аспекты поведения квантовых частиц, описав их точным уравнением. Именно это и было сделано в соотношении де Бройля.

Луи де Бройль опубликовал выведенное им соотношение в качестве составной части своей докторской диссертации в 1924 году. Казавшееся сначала сумасшедшей идеей, соотношение де Бройля в корне перевернуло представления физиков-теоретиков о микромире и сыграло важнейшую роль в становлении квантовой механики. В дальнейшем карьера де Бройля сложилась весьма прозаично: до выхода на пенсию он работал профессором физики в Париже и никогда более не поднимался до головокружительных высот революционных прозрений.

Теперь кратко опишем физический смысл соотношения де Бройля: одна из физических характеристик любой частицы — ее скорость. При этом физики по ряду теоретических и практических соображений предпочитают говорить не о скорости частицы как таковой, а о ее импульсе (или количестве движения), который равен произведению скорости частицы на ее массу. Волна описывается совсем другими фундаментальными характеристиками - длиной (расстоянием между двумя соседними пиками амплитуды одного знака) или частотой (величина, обратно пропорциональная длине волны, то есть число пиков, проходящих через фиксированную точку за единицу времени). Де Бройлю же удалось сформулировать соотношение, связывающее импульс квантовой частицы p с длиной волны λ , которая ее описывает:

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

где h — постоянная Планка.

Это соотношение гласит буквально следующее: при желании можно рассматривать квантовый объект как частицу, обладающую количеством движения p ; с другой стороны, ее можно рассматривать и как волну, длина которой равна λ и определяется предложенным уравнением. Иными словами, волновые и корпускулярные свойства квантовой частицы фундаментальным образом взаимосвязаны.

Соотношение де Бройля позволило объяснить одну из величайших загадок зарождающейся квантовой механики. Когда Нильс Бор предложил свою модель атома, она включала концепцию разрешенных орбит электронов вокруг ядра, по которым они могли сколь угодно долго вращаться без потери энергии. С помощью соотношения де Бройля мы можем проиллюстрировать это понятие.

Если считать электрон частицей, то, чтобы электрон оставался на своей орбите, у него должна быть одна и та же скорость (или, вернее, импульс) на любом расстоянии от ядра.

Если же считать электрон волной, то, чтобы он вписался в орбиту заданного радиуса, надо, чтобы длина окружности этой орбиты была равна целому числу длины его волны. Иными словами, окружность орбиты электрона может равняться только одной, двум, трем (и так далее) длинам его волн. В случае нецелого числа длин волны электрон просто не попадет на нужную орбиту.

Главный же физический смысл соотношения де Бройля в том, что мы всегда можем определить разрешенные импульсы (в корпускулярном представлении) или длины волн (в волновом представлении) электронов на орбитах. Для большинства орбит, однако, соотношение де Бройля показывает, что электрон (рассматриваемый как частица) с конкретным импульсом не может иметь соответствующую длину волны (в волновом представлении) такую, что он впишется в эту орбиту. И наоборот, электрон, рассматриваемый как волна определенной длины, далеко не всегда будет иметь соответствующий импульс, который позволит электрону оставаться на орбите (в корпускулярном представлении). Иными словами, для большинства орбит с конкретным радиусом либо волновое, либо корпускулярное описание покажет, что электрон не может находиться на этом расстоянии от ядра.

Однако существует небольшое количество орбит, на которых волновое и корпускулярное представление об электроне совпадают. Для этих орбит импульс, необходимый для того, чтобы электрон продолжал движение по орбите (корпускулярное описание), в точности соответствует длине волны, необходимой, чтобы электрон вписался в окружность (волновое описание). Именно эти орбиты и оказываются разрешенными в модели атома Бора, поскольку только на них корпускулярные и волновые свойства электронов не вступают в противоречие.

Есть еще одна интерпретация этого принципа — философская: модель атома Бора допускает только такие состояния и орбиты электронов, при которых не важно, какую из двух ментальных категорий человек применяет для их описания. То есть, иными словами, реальный микромир устроен так, что ему нет дела до того, в каких категориях мы пытаемся его осмыслить!

4.5 Квантовая механика 1925

На субатомном уровне частицы описываются волновыми функциями.

Слово «квант» происходит от латинского quantum («сколько, как много») и английского quantum («количество, порция, квант»). «Механикой» издавна принято называть науку о движении материи. Соответственно, термин «квантовая механика» означает науку о движении материи порциями (или науку о движении квантующейся материи). Термин «квант» ввел в обиход немецкий физик Макс

Планк для описания взаимодействия света с атомами.

Квантовая механика часто противоречит нашим понятиям о здравом смысле. А всё потому, что здравый смысл подсказывает нам вещи, которые берутся из повседневного опыта, а в своем повседневном опыте нам приходится иметь дело только с крупными объектами и явлениями макромира, а на атомарном и субатомном уровне материальные частицы ведут себя совсем иначе. Принцип неопределенности Гейзенберга как раз и очерчивает смысл этих различий. В макромире мы можем достоверно и однозначно определить местонахождение (пространственные координаты) любого объекта (например, этой книги). Не важно, используем ли мы линейку, радар, сонар, фотометрию или любой другой метод измерения, результаты замеров будут объективными и не зависящими от положения книги (конечно, при условии аккуратности в процессе замера). То есть некоторая неопределенность и неточность возможны - но лишь в силу ограниченных возможностей измерительных приборов и погрешностей наблюдения. Чтобы получить более точные и достоверные результаты, нам достаточно взять более точный измерительный прибор и постараться воспользоваться им без ошибок.

Теперь если вместо координат книги нам нужно измерить координаты микрочастицы, например электрона, то мы уже не можем пренебречь взаимодействиями между измерительным прибором и объектом измерения. Сила воздействия линейки или другого измерительного прибора на книгу пренебрежимо мала и не сказывается на результатах измерений, но чтобы измерить пространственные координаты электрона, нам нужно запустить в его направлении фотон, другой электрон или другую элементарную частицу сопоставимых с измеряемым электроном энергий и замерить ее отклонение. Но при этом сам электрон, являющийся объектом измерения, в результате взаимодействия с этой частицей изменит свое положение в пространстве. Таким образом, сам акт замера приводит к изменению положения измеряемого объекта, и неточность измерения обуславливается самим фактом проведения измерения, а не степенью точности используемого измерительного прибора. Вот с какой ситуацией мы вынуждены мириться в микромире. Измерение невозможно без взаимодействия, а взаимодействие - без воздействия на измеряемый объект и, как следствие, искажения результатов измерения.

О результатах этого взаимодействия можно утверждать лишь одно:

$$\Delta x \cdot \Delta v > \frac{h}{m},$$

где Δx и Δv — неопределенность пространственного положения и скорости частицы соответственно, m — масса частицы.

Соответственно, неопределенность возникает при определении пространственных координат не только электрона, но и любой субатомной частицы, да и не только координат, но и других свойств

частиц — таких как скорость. Аналогичным образом определяется и погрешность измерения любой такой пары взаимно увязанных характеристик частиц (пример другой пары — энергия, излучаемая электроном, и отрезок времени, за который она испускается). То есть если нам, например, удалось с высокой точностью измерили пространственное положение электрона, значит мы в этот же момент времени имеем лишь самое смутное представление о его скорости, и наоборот. Естественно, при реальных измерениях до этих двух крайностей не доходит, и ситуация всегда находится где-то посередине. То есть если нам удалось, например, измерить положение электрона с точностью до 10^{-6} м, значит мы одновременно можем измерить его скорость, в лучшем случае, с точностью до 650 м/с.

Из-за принципа неопределенности описание объектов квантового микромира носит иной характер, нежели привычное описание объектов ньютоновского макромира. Вместо пространственных координат и скорости, которыми мы привыкли описывать механическое движение, например шара по бильярдному столу, в квантовой механике объекты описываются так называемой волновой функцией. Гребень «волны» соответствует максимальной вероятности нахождения частицы в пространстве в момент измерения. Движение такой волны описывается уравнением Шрёдингера, которое и говорит нам о том, как изменяется со временем состояние квантовой системы.

Картина квантовых событий в микромире, рисуемая уравнением Шрёдингера, такова, что частицы уподобляются отдельным приливным волнам, распространяющимся по поверхности океана пространства. Со временем гребень волны (соответствующий пику вероятности нахождения частицы, например электрона, в пространстве) перемещается в пространстве в соответствии с волновой функцией, являющейся решением этого дифференциального уравнения. Соответственно, то, что нам традиционно представляется частицей, на квантовом уровне проявляет ряд характеристик, свойственных волнам.

Согласование волновых и корпускулярных свойств объектов микромира стало возможным после того, как физики условились считать объекты квантового мира не частицами и не волнами, а чем-то промежуточным и обладающим как волновыми, так и корпускулярными свойствами; в ньютоновской механике аналогов таким объектам нет. Хотя и при таком решении парадоксов в квантовой механике всё равно хватает, лучшей модели для описания процессов, происходящих в микромире, никто до сих пор не предложил.

4.6 Принцип соответствия 1923

При предельных значениях квантовых чисел результаты квантовой механики совпадают с результатами классической механики.

В мире квантовой механики, где всё определяют принцип неопределенности Гейзенберга и урав-

нение Шрёдингера, картина происходящего кардинально отличается от привычного нам мира классической механики, где действуют законы движения Ньютона. Однако же наш макроскопический мир соткан из микроскопических атомов, и законы макро- и микромира не могут не быть увязаны между собой. Впервые принцип соответствия законов микро- и макромира был озвучен датским физиком-теоретиком Нильсом Бором, и за иллюстрацией для лучшего понимания этого принципа лучше всего обратиться к упрощенной модели атома, которую также впервые представил миру этот же ученый.

В атоме Бора электроны могут находиться только на «разрешенных» орбитах. Орбиты выстраиваются по главным квантовым числам. Ближайшая к ядру орбита имеет главное квантовое число, равное 1, следующая — 2 и т. д. Чем выше квантовое число электронной орбиты, тем дальше она удалена от ядра. По контрасту — в классическом ядре, предсказываемом ньютоновской механикой, электроны могут обращаться вокруг ядра по произвольным орбитам, находящимся от ядра на любом удалении (это, собственно, и могло бы происходить, не принимая мы во внимание квантовые эффекты).

Теперь, хотя физический радиус орбит и увеличивается неуклонно по мере возрастания главного квантового числа, кинетическая энергия электронов на этих орбитах увеличивается отнюдь не пропорционально расширению орбит, а снижающимися темпами, причем имеется верхний предел энергии удержания электронов на орбите вокруг ядра, который принято называть энергией срыва или энергией ионизации. Разогнавшись до такой энергии, электрон, теоретически, оказывается на орбите бесконечного радиуса, то есть, иными словами, превращается в свободный электрон и высвобождается из ионизированного атома. Между этим крайним пределом энергии высвобождения электрона и другим крайним пределом энергии нахождения электрона на первой к ядру орбите имеется счетный (но бесконечный) ряд допустимых дискретных энергетических состояний, в которых может находиться удерживаемый ядром электрон, причем, согласно законам квантовой механики, на достаточно удаленных от ядра расстояниях допустимые орбиты электронов начинают накладываться одна на другую. Происходит это в силу того, что допустимая энергия электрона на определенной орбите (и радиус этой орбиты, как следствие) определяется не точным квантовым числом, а, в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга, размыто — то есть, мы имеем лишь распределение вероятностей нахождения электрона на одной из соседних орбит. Здесь и начинается «стирание различий» между квантовомеханической моделью атома, где электрон может находиться лишь в фиксированных энергетических состояниях, поглощать и испускать энергию фиксированными порциями (квантами) и, соответственно, обитать на строго определенных орбитах, и классической моделью атома, где электрон обладает произвольной энергией и движется по произвольным орбитам. Иными словами, на больших удалениях от ядра атом начинает представлять собой классическую си-

стему, подчиняющуюся законам механики Ньютона. Это, пожалуй, самый иллюстративный пример принципа соответствия в действии.

Принцип соответствия вступает в силу на нечеткой границе между квантовой и классической механикой и еще раз демонстрирует нам, что в природе нет явных границ между явлениями, как нет и четкого разграничения между теоретическими описаниями природных явлений. И еще он демонстрирует нам то, о чем уже говорилось во Введении относительно тенденций развития теоретической науки. Квантовая механика, например, отнюдь не отменяет и не подменяет собой классическую механику Ньютона, а лишь представляет собой предельный случай при переходе явлений в масштабы микромира. Вообще, естественнонаучные теории вырастают одна из другой по мере расширения наших ранее накопленных знаний подобно новым свежим побегам на древе познания окружающего мира.

4.7 Принцип неопределенности Гейзенберга 1927

Невозможно одновременно с точностью определить координаты и скорость квантовой частицы.

В обыденной жизни нас окружают материальные объекты, размеры которых сопоставимы с нами: машины, дома, песчинки и т. д. Наши интуитивные представления об устройстве мира формируются в результате повседневного наблюдения за поведением таких объектов. Поскольку все мы имеем за плечами прожитую жизнь, накопленный за ее годы опыт подсказывает нам, что раз всё наблюдаемое нами раз за разом ведет себя определенным образом, значит и во всей Вселенной, во всех масштабах материальные объекты должны вести себя аналогичным образом. И когда выясняется, что где-то что-то не подчиняется привычным правилам и противоречит нашим интуитивным понятиям о мире, нас это не просто удивляет, а шокирует.

В первой четверти XX века именно такова была реакция физиков, когда они стали исследовать поведение материи на атомном и субатомном уровнях. Появление и бурное развитие квантовой механики открыло перед нами целый мир, системное устройство которого попросту не укладывается в рамки здравого смысла и полностью противоречит нашим интуитивным представлениям. Но нужно помнить, что наша интуиция основана на опыте поведения обычных предметов соизмеримых с нами масштабов, а квантовая механика описывает вещи, которые происходят на микроскопическом и невидимом для нас уровне, - ни один человек никогда напрямую с ними не сталкивался. Если забыть об этом, мы неизбежно придем в состояние полного замешательства и недоумения.

Принцип Гейзенберга вообще играет в квантовой механике ключевую роль хотя бы потому, что достаточно наглядно объясняет, как и почему микромир отличается от знакомого нам материального мира. Чтобы понять этот принцип, задумайтесь для начала о том, что значит «измерить» какую

бы то ни было величину. Чтобы отыскать, например, эту книгу, вы, войдя в комнату, окидываете ее взглядом, пока он не остановится на ней. На языке физики это означает, что вы провели визуальное измерение (нашли взглядом книгу) и получили результат - зафиксировали ее пространственные координаты (определили местоположение книги в комнате). На самом деле процесс измерения происходит гораздо сложнее: источник света (Солнце или лампа, например) испускает лучи, которые, пройдя некий путь в пространстве, взаимодействуют с книгой, отражаются от ее поверхности, после чего часть из них доходит до ваших глаз, проходя через хрусталик, фокусируется, попадает на сетчатку - и вы видите образ книги и определяете ее положение в пространстве. Ключ к измерению здесь - взаимодействие между светом и книгой. Так и при любом измерении, представьте себе, инструмент измерения (в данном случае, это свет) вступает во взаимодействие с объектом измерения (в данном случае, это книга).

В классической физике, построенной на ньютоновских принципах и применимой к объектам нашего обычного мира, мы привыкли игнорировать тот факт, что инструмент измерения, вступая во взаимодействие с объектом измерения, воздействует на него и изменяет его свойства, включая, собственно, измеряемые величины. Включая свет в комнату, чтобы найти книгу, вы даже не задумываетесь о том, что под воздействием возникшего давления световых лучей книга может сдвинуться со своего места, и вы узнаете ее искаженные под влиянием включенного вами света пространственные координаты. Интуиция подсказывает нам (и, в данном случае, совершенно правильно), что акт измерения не влияет на измеряемые свойства объекта измерения. А теперь задумайтесь о процессах, происходящих на субатомном уровне. Допустим, мне нужно зафиксировать пространственное местонахождение электрона. Мне по-прежнему нужен измерительный инструмент, который вступит во взаимодействие с электроном и возвратит моим детекторам сигнал с информацией о его местопребывании. И тут же возникает сложность: иных инструментов взаимодействия с электроном для определения его положения в пространстве, кроме других элементарных частиц, у меня нет. И, если предположение о том, что свет, вступая во взаимодействие с книгой, на ее пространственных координатах не сказывается, относительно взаимодействия измеряемого электрона с другим электроном или фотонами такого сказать нельзя.

В начале 1920-х годов, когда произошел бурный всплеск творческой мысли, приведший к созданию квантовой механики, эту проблему первым осознал молодой немецкий физик-теоретик Вернер Гейзенберг. Начав со сложных математических формул, описывающих мир на субатомном уровне, он постепенно пришел к удивительной по простоте формуле, дающей общее описание эффекта воздействия инструментов измерения на измеряемые объекты микромира, о котором мы только что говорили. В результате им был сформулирован принцип неопределенности, названный соотношени-

ем неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta v > \frac{h}{m},$$

— неопределенность пространственного положения и скорости частицы соответственно, m — масса частицы. где Δx — неопределенность (погрешность измерения) пространственной координаты микрочастицы, Δv — неопределенность скорости частицы.

Термин «неопределенность пространственной координаты» как раз и означает, что мы не знаем точного местоположения частицы. Например, если вы используете глобальную систему рекогносцировки GPS, чтобы определить местоположение этой книги, система вычислит их с точностью до 2-3 метров. (GPS, Global Positioning System - навигационная система, в которой задействованы 24 искусственных спутника Земли. Если у вас, например, на автомобиле установлен приемник GPS, то, принимая сигналы от этих спутников и сопоставляя время их задержки, система определяет ваши географические координаты на Земле с точностью до угловой секунды.) Однако, с точки зрения измерения, проведенного инструментом GPS, книга может с некоторой вероятностью находиться где угодно в пределах указанных системой нескольких квадратных метров. В таком случае мы и говорим о неопределенности пространственных координат объекта (в данном примере, книги). Ситуацию можно улучшить, если взять вместо GPS рулетку - в этом случае мы сможем утверждать, что книга находится, например, в 4 м 11 см от одной стены и в 1 м 44 см от другой. Но и здесь мы ограничены в точности измерения минимальным делением шкалы рулетки (пусть это будет даже миллиметр) и погрешностями измерения и самого прибора, - и в самом лучшем случае нам удастся определить пространственное положение объекта с точностью до минимального деления шкалы. Чем более точный прибор мы будем использовать, тем точнее будут полученные нами результаты, тем ниже будет погрешность измерения и тем меньше будет неопределенность. В принципе, в нашем обыденном мире свести неопределенность к нулю и определить точные координаты книги можно.

И тут мы подходим к самому принципиальному отличию микромира от нашего повседневного физического мира. В обычном мире, измеряя положение и скорость тела в пространстве, мы на него практически не воздействуем. Таким образом, в идеале мы можем одновременно измерить и скорость, и координаты объекта абсолютно точно (иными словами, с нулевой неопределенностью).

В мире квантовых явлений, однако, любое измерение воздействует на систему. Сам факт проведения нами измерения, например, местоположения частицы, приводит к изменению ее скорости, причем непредсказуемому (и наоборот). Вот почему в правой части соотношения Гейзенберга стоит не нулевая, а положительная величина. Чем меньше неопределенность в отношении одной переменной (например, Δx), тем более неопределенной становится другая переменная (Δv), поскольку произведение двух погрешностей в левой части соотношения не может быть меньше константы в правой его части. На самом деле, если нам удастся с нулевой погрешностью (абсолютно точно) определить

одну из измеряемых величин, неопределенность другой величины будет равняться бесконечности, и о ней мы не будем знать вообще ничего. Иными словами, если бы нам удалось абсолютно точно установить координаты квантовой частицы, о ее скорости мы не имели бы ни малейшего представления; если бы нам удалось точно зафиксировать скорость частицы, мы бы понятия не имели, где она находится. На практике, конечно, физикам-экспериментаторам всегда приходится искать какой-то компромисс между двумя этими крайностями и подбирать методы измерения, позволяющие с разумной погрешностью судить и о скорости, и о пространственном положении частиц.

На самом деле, принцип неопределенности связывает не только пространственные координаты и скорость - на этом примере он просто проявляется нагляднее всего; в равной мере неопределенность связывает и другие пары взаимно увязанных характеристик микрочастиц. Путем аналогичных рассуждений мы приходим к выводу о невозможности безошибочно измерить энергию квантовой системы и определить момент времени, в который она обладает этой энергией. То есть, если мы проводим измерение состояния квантовой системы на предмет определения ее энергии, это измерение займет некоторый отрезок времени — назовем его Δt . За этот промежуток времени энергия системы случайным образом меняется — происходят ее флуктуация, — и выявить ее мы не можем. Обозначим погрешность измерения энергии ΔE . Путем рассуждений, аналогичных вышеприведенным, мы приходим к аналогичному соотношению для ΔE и неопределенности времени, которым квантовая частица этой энергией обладала:

$$\Delta E \cdot \Delta t > h.$$

Относительно принципа неопределенности нужно сделать еще два важных замечания:

- он не подразумевает, что какую-либо одну из двух характеристик частицы - пространственное местоположение или скорость — нельзя измерить сколь угодно точно;
- принцип неопределенности действует объективно и не зависит от присутствия разумного субъекта, проводящего измерения.

Иногда вам могут встретиться утверждения, будто принцип неопределенности подразумевает, что у квантовых частиц отсутствуют определенные пространственные координаты и скорости, или что эти величины абсолютно непознаваемы. Как мы только что видели, принцип неопределенности не мешает нам с любой желаемой точностью измерить каждую из этих величин. Он утверждает лишь, что мы не в состоянии достоверно узнать и то, и другое одновременно. И, как и во многом другом, мы вынуждены идти на компромисс. Опять же, писатели-антропософы из числа сторонников концепции «Новой эры» иногда утверждают, что, якобы, поскольку измерения подразумевают присутствие разумного наблюдателя, то, значит, на некоем фундаментальном уровне человеческое сознание связано с Вселенским разумом, и именно эта связь обуславливает принцип неопределенности.

Повторим по этому поводу еще раз: ключевым в соотношении Гейзенберга является взаимодействие между частицей-объектом измерения и инструментом измерения, влияющим на его результаты. А тот факт, что при этом присутствует разумный наблюдатель в лице ученого, отношения к делу не имеет; инструмент измерения в любом случае влияет на его результаты, присутствует при этом разумное существо или нет.

4.8 Принцип дополнительности 1927

Объекты микромира описываются и как частицы, и как волны, и одно описание дополняет другое.

В повседневной жизни имеется два способа переноса энергии в пространстве - посредством частиц или волн. Чтобы, скажем, скинуть со стола костяшку домино, балансирующую на его краю, можно придать ей необходимую энергию двумя способами. Во-первых, можно бросить в нее другую костяшку домино (то есть передать точечный импульс с помощью частицы). Во-вторых, можно построить в ряд стоящие костяшки домино, по цепочке ведущие к той, что стоит на краю стола, и уронить первую на вторую: в этом случае импульс передастся по цепочке — вторая костяшка завалит третью, третья четвертую и так далее. Это - волновой принцип передачи энергии. В обыденной жизни между двумя механизмами передачи энергии видимых противоречий не наблюдается. Так, баскетбольный мяч — это частица, а звук — это волна, и всё ясно.

Однако в квантовой механике всё обстоит отнюдь не так просто. Даже из простейших опытов с квантовыми объектами очень скоро становится понятно, что в микромире привычные нам принципы и законы макромира не действуют. Свет, который мы привыкли считать волной, порой ведет себя так, будто состоит из потока частиц (фотонов), а элементарные частицы, такие как электрон или даже массивный протон, нередко проявляют свойства волны.

Теперь давайте проведем несложный эксперимент для иллюстрации вышесказанного. Предположим, у нас есть замкнутая камера с двумя тонкими горизонтальными прорезями - одна выше средней линии, другая ниже. Теперь представим, что на эти прорези направлен параллельный пучок световых лучей. Естественно предположить, что частицы света будут проходить через оба отверстия прямо, и на задней стенке камеры (на экране) будут наблюдаться две отчетливые световые полосы напротив каждой из прорезей, а посередине между ними свет попадать не должен.

Однако на практике мы наблюдаем совершенно иную картину. Согласно принципу Гюйгенса, каждая из прорезей играет роль независимого источника вторичных световых волн, и на экране на средней линии между двумя прорезями мы, напротив, должны наблюдать максимум амплитуды их колебаний. В частности, звуковые волны, исходящие из двух стереодинамиков, как раз и дают пик громкости на линии равного удаления между ними. То же самое касается и двух равноудаленных

источников световых волн, проецируемых на экран. Иными словами, пик амплитуды волны приходится как раз на ту пространственную зону, куда, согласно корпускулярной теории, должно попадать минимальное число частиц.

Если направить на подобную камеру пучок электронов, на экране будут отчетливо прослеживаться свойственные волнам полосы пиков и спадов интенсивности излучения, то есть электрон будет вести себя как волна. С другой стороны, если «выстреливать» электроны по одному, каждый из них будет оставлять четкий след на экране - то есть вести себя как частица. Самое интересное, что то же самое будет, если вместо пучка электронов вы возьмете пучок фотонов: в пучке они будут вести себя как волны, а по отдельности — как частицы.

Подытожим сказанное. Если фотоны или электроны направлять в такую камеру по одному, они ведут себя как частицы; однако если собрать достаточную статистику таких одиночных экспериментов, то выяснится, что по совокупности эти же электроны или фотоны распределятся на задней стенке камеры так, что на ней будет наблюдаться знакомая картина чередующихся пиков и спадов интенсивности, свидетельствующая об их волновой природе. Иными словами, в микромире объекты, которые ведут себя как частицы, при этом как бы «помнят» о своей волновой природе, и наоборот. Это странное свойство объектов микромира получило название квантово-волнового дуализма. Проводилось множество экспериментов с целью «разоблачить истинную природу» квантовых частиц: использовались различные экспериментальные методики и установки, включая такие, которые позволили бы на полпути к приемнику выявить волновые свойства отдельной частицы или, напротив, определить волновые свойства светового пучка через характеристики отдельных квантов. Всё тщетно. Судя по всему, квантово-волновой дуализм объективно присущ квантовым частицам.

Принцип дополнительности - простая констатация этого факта. Согласно этому принципу, если мы измеряем свойства квантового объекта как частицы, мы видим, что он ведет себя как частица. Если же мы измеряем его волновые свойства, для нас он ведет себя как волна. Оба представления отнюдь не противоречат друг другу - они именно дополняют одно другое, что и отражено в названии принципа.

Философия науки выиграла от такого корпускулярно-волнового дуализма несопоставимо больше, чем было бы возможно при его отсутствии и строгом разграничении явлений на корпускулярные и волновые. Сегодня совершенно очевидно, что объекты микромира ведут себя принципиально иным образом, нежели объекты привычного нам макромира. Но почему? На каких скрижалях это записано? И, подобно тому как средневековые натурфилософы мучительно пытались понять, является ли полет стрелы «свободным» или «вынужденным», так и современные философы бьются над разрешением квантово-волнового дуализма. На самом же деле и электроны, и фотоны представляют собой не волны и не частицы, а нечто совершенно особенное по своей внутренней природе - и потому не под-

дающееся описанию в терминах нашего повседневного опыта. Если же и дальше пытаться втиснуть их поведение в рамки знакомых нам парадигм, неизбежны всё новые парадоксы. Так что главный вывод здесь состоит в том, что наблюдаемый нами дуализм порожден не присущими квантовым объектам свойствами, а несовершенством категорий, которыми мы мыслим.

4.9 Уравнение Шрёдингера 1926

Дуальная корпускулярно-волновая природа квантовых частиц описывается дифференциальным уравнением.

Согласно фольклору, столь распространенному среди физиков, случилось это так: в 1926 году физик-теоретик по имени Эрвин Шрёдингер выступал на научном семинаре в Цюрихском университете. Он рассказывал о странных новых идеях, витающих в воздухе, о том, что объекты микромира часто ведут себя скорее как волны, нежели как частицы. Тут слова попросил пожилой преподаватель и сказал: «Шрёдингер, вы что, не видите, что всё это чушь? Или мы тут все не знаем, что волны - они на то и волны, чтобы описываться волновыми уравнениями?» Шрёдингер воспринял это как личную обиду и задался целью разработать волновое уравнение для описания частиц в рамках квантовой механики - и с блеском справился с этой задачей.

Тут необходимо сделать пояснение. В нашем обыденном мире энергия переносится двумя способами: материей при движении с места на место (например, едущим локомотивом или ветром) - в такой передаче энергии участвуют частицы - или волнами (например, радиоволнами, которые передаются мощными передатчиками и ловятся антеннами наших телевизоров). То есть в макром мире, где живём мы с вами, все носители энергии строго подразделяются на два типа — корпускулярные (состоящие из материальных частиц) или волновые. При этом любая волна описывается особым типом уравнений - волновыми уравнениями. Все без исключения волны - волны океана, сейсмические волны горных пород, радиоволны из далеких галактик — описываются однотипными волновыми уравнениями. Это пояснение нужно для того, чтобы было понятно, что если мы хотим представить явления субатомного мира в терминах волн распределения вероятности, эти волны также должны описываться соответствующим волновым уравнением.

Шрёдингер применил к понятию волн вероятности классическое дифференциальное уравнение волновой функции и получил знаменитое уравнение, носящее его имя. Подобно тому как обычное уравнение волновой функции описывает распространение, например, ряби по поверхности воды, уравнение Шрёдингера описывает распространение волны вероятности нахождения частицы в заданной точке пространства. Пики этой волны (точки максимальной вероятности) показывают, в каком месте пространства скорее всего окажется частица. Хотя уравнение Шрёдингера относится

к области высшей математики, оно настолько важно для понимания современной физики, что я его все-таки здесь приведу — в самой простой форме (так называемое «одномерное стационарное уравнение Шрёдингера»). Вышеупомянутая волновая функция распределения вероятности, обозначаемая греческой буквой Ψ , является решением следующего дифференциального уравнения (ничего страшного, если оно вам не понятно; главное - примите на веру, что это уравнение свидетельствует о том, что вероятность ведёт себя как волна):

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\Psi = 0$$

где x — расстояние, h — постоянная Планка, а m , E и U — соответственно масса, полная энергия и потенциальная энергия частицы.

Картина квантовых событий, которую дает нам уравнение Шрёдингера, заключается в том, что электроны и другие элементарные частицы ведут себя подобно волнам на поверхности океана. С течением времени пик волны (соответствующий месту, в котором скорее всего будет находиться электрон) смещается в пространстве в соответствии с описывающим эту волну уравнением. То есть то, что мы традиционно считали частицей, в квантовом мире ведёт себя во многом подобно волне.

Когда Шрёдингер впервые опубликовал свои результаты, в мире теоретической физики разразилась буря в стакане воды. Дело в том, что практически в то же время появилась работа современника Шрёдингера - Вернера Гейзенберга, в которой автор выдвинул концепцию «матричной механики», где те же задачи квантовой механики решались в другой, более сложной с математической точки зрения матричной форме. Переполюх был вызван тем, что ученые попросту испугались, не противоречат ли друг другу два в равной мере убедительных подхода к описанию микромира. Волнения были напрасны. Сам Шрёдингер в том же году доказал полную эквивалентность двух теорий - то есть из волнового уравнения следует матричное, и наоборот; результаты же получаются идентичными. Сегодня используется в основном версия Шрёдингера (иногда его теорию называют «волновой механикой»), так как его уравнение менее громоздкое и его легче преподавать.

Однако представить себе и принять, что нечто вроде электрона ведёт себя как волна, не так-то просто. В повседневной жизни мы сталкиваемся либо с частицей, либо с волной. Мяч - это частица, звук - это волна, и всё тут. В мире квантовой механики всё не так однозначно. На самом деле — и эксперименты это вскоре показали - в квантовом мире сущности отличаются от привычных нам объектов и обладают другими свойствами. Свет, который мы привыкли считать волной, иногда ведёт себя как частица (которая называется фотон), а частицы вроде электрона и протона могут вести себя как волны.

Эту проблему обычно называют двойственной или дуальной корпускулярно-волновой природой квантовых частиц, причем свойственна она, судя по всему, всем объектам субатомного мира. Мы

должны понять, что в микромире наши обыденные интуитивные представления о том, какие формы может принимать материя и как она себя может вести, просто неприменимы. Сам факт, что мы используем волновое уравнение для описания движения того, что привыкли считать частицами, — яркое тому доказательство. В этом нет особого противоречия. Ведь у нас нет никаких веских оснований полагать, будто то, что мы наблюдаем в макромире, должно с точностью воспроизводиться на уровне микромира. И тем не менее дуальная природа элементарных частиц остается одним из самых непонятных и тревожащих аспектов квантовой механики для многих людей, и не будет преувеличением сказать, что все беды начались с Эрвина Шрёдингера.

4.10 Опыт Дэвиссона-Джермера 1927

Электрон может проявлять свойства не только частицы, но и волны.

Согласно принципу дополнительности частицы в рамках квантовой механики могут проявлять волновые свойства, а волны — корпускулярные. Электрон, например, традиционно представляли себе в виде отрицательно заряженного миниатюрного шарика, однако в 1924 году Луи де Бройль показал, что любую частицу, обладающую импульсом p можно представить в виде волны, длина которой равна:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Естественно, ученые сразу же стали проверять эту гипотезу, и самым естественным методом проверки оказались попытки обнаружить волновую дифракцию электронов. Однако успехом эти попытки увенчались лишь в 1927 году благодаря классическим опытам, поставленным американцами Клинтоном Дэвиссоном и Лестером Джермером и, независимо от них, англичанином Джорджем Томсоном.

Американские экспериментаторы в качестве источника свободных электронов использовали раскаленную нить, помещенную в вакуумную камеру. Полученный направленный пучок быстрых электронов они рассеивали на кристалле. В итоге им удалось обнаружить интерференционные пики интенсивности рассеянных электронов, первый из которых приходился на угол рассеяния около 65° .

То есть, фактически, они воспроизвели эксперимент по рассеянию рентгеновских лучей (приведший к открытию их дифракции на кристаллах и выводу закона Брэгга), используя вместо рентгеновского луча сфокусированный поток электронов. По сути, каждый атом кристалла, согласно принципу Гюйгенса, является источником вторичных волн, и они взаимно усиливаются в результате интерференции между ними при рассеянии под определенными углами, когда фазы интерферирующих вторичных волн совпадают. И Дэвиссону с Джермером удалось найти такой угол максимума числа рассеянных электронов. Рассчитав по этому углу и импульсу электронов длину волны, ученые

выяснили, что она в точности совпадает с длиной волны, предсказываемой соотношением де Бройля. Так была доказана гипотеза о наличии у элементарных частиц волновых свойств.

4.11 Квантовый туннельный эффект 1924

Имеется вероятность, что квантовая частица проникнет за барьер, который непреодолим для классической элементарной частицы.

Представьте шарик, катающийся внутри сферической ямки, вырытой в земле. В любой момент времени энергия шарика распределена между его кинетической энергией и потенциальной энергией силы тяжести в пропорции, зависящей от того, насколько высоко шарик находится относительно дна ямки (согласно первому началу термодинамики). При достижении шариком борта ямки возможны два варианта развития событий. Если его совокупная энергия превышает потенциальную энергию гравитационного поля, определяемую высотой точки нахождения шарика, он выпрыгнет из ямки. Если же совокупная энергия шарика меньше потенциальной энергии силы тяжести на уровне борта лунки, шарик покатится вниз, обратно в ямку, в сторону противоположного борта; в тот момент, когда потенциальная энергия будет равна совокупной энергии шарика, он остановится и покатится назад. Во втором случае шарик никогда не выкатится из ямки, если не придать ему дополнительную кинетическую энергию - например, подтолкнув. Согласно законам механики Ньютона, шарик никогда не покинет ямку без придания ему дополнительного импульса, если у него недостаточно собственной энергии для того, чтобы выкатиться за борт.

А теперь представьте, что борта ямы возвышаются над поверхностью земли (наподобие лунных кратеров). Если шарiku удастся перевалить за приподнятый борт такой ямы, он покатится дальше. Важно помнить, что в ньютоновском мире шарика и ямки сам факт, что, перевалив за борт ямки, шарик покатится дальше, не имеет смысла, если у шарика недостаточно кинетической энергии для достижения верхнего края. Если он не достигнет края, он из ямы просто не выберется и, соответственно, ни при каких условиях, ни с какой скоростью и никуда не покатится дальше, на какой бы высоте над поверхностью снаружи ни находился край борта.

В мире квантовой механики дело обстоит иначе. Представим себе, что в чем-то вроде такой ямы находится квантовая частица. В этом случае речь идет уже не о реальной физической яме, а об условной ситуации, когда частице требуется определенный запас энергии, необходимый для преодоления барьера, мешающего ей вырваться наружу из того, что физики условились называть «потенциальной ямой». У этой ямы есть и энергетический аналог борта - так называемый «потенциальный барьер». Так вот, если снаружи от потенциального барьера уровень напряженности энергетического поля ниже, чем энергия, которой обладает частица, у нее имеется шанс оказаться «за бортом», даже если

реальной кинетической энергии этой частицы недостаточно, чтобы «перевалить» через край борта в ньютоновском понимании. Этот механизм прохождения частицы через потенциальный барьер и назвали квантовым туннельным эффектом.

Работает он так: в квантовой механике частица описывается через волновую функцию, которая связана с вероятностью местонахождения частицы в данном месте в данный момент времени. Если частица сталкивается с потенциальным барьером, уравнение Шрёдингера позволяет рассчитать вероятность проникновения частицы через него, поскольку волновая функция не просто энергетически поглощается барьером, но очень быстро гасится - по экспоненте. Иными словами, потенциальный барьер в мире квантовой механики размыт. Он, конечно, препятствует движению частицы, но не является твердой, непроницаемой границей, как это имеет место в классической механике Ньютона.

Если барьер достаточно низок или если суммарная энергия частицы близка к пороговой, волновая функция, хотя и убывает стремительно при приближении частицы к краю барьера, оставляет ей шанс преодолеть его. То есть имеется определенная вероятность, что частица будет обнаружена по другую сторону потенциального барьера — в мире механики Ньютона это было бы невозможно. А раз уж частица перевалила через край барьера (пусть он имеет форму лунного кратера), она свободно покатится вниз по его внешнему склону прочь от ямы, из которой выбралась.

Квантовый туннельный переход можно рассматривать как своего рода «утечку» или «просачивание» частицы через потенциальный барьер, после чего частица движется прочь от барьера. В природе достаточно примеров такого рода явлений, равно как и в современных технологиях. Возьмем типичный радиоактивный распад: тяжелое ядро излучает альфа-частицу, состоящую из двух протонов и двух нейтронов. С одной стороны, можно представить себе этот процесс таким образом, что тяжелое ядро удерживает внутри себя альфа-частицу посредством сил внутриядерной связи, подобно тому как шарик удерживался в ямке в нашем примере. Однако даже если у альфа-частицы недостаточно свободной энергии для преодоления барьера внутриядерных связей, всё равно имеется вероятность ее отрыва от ядра. И, наблюдая спонтанное альфа-излучение, мы получаем экспериментальное подтверждение реальности туннельного эффекта.

Другой важный пример туннельного эффекта - процесс термоядерного синтеза, питающий энергией звезды. Один из этапов термоядерного синтеза — столкновение двух ядер дейтерия (по одному протону и одному нейтрону в каждом), в результате чего образуется ядро гелия-3 (два протона и один нейтрон) и испускается один нейтрон. Согласно закону Кулона, между двумя частицами с одинаковым зарядом (в данном случае протонами, входящими в состав ядер дейтерия) действует мощнейшая сила взаимного отталкивания - то есть налицо мощнейший потенциальный барьер. В мире по Ньютону ядра дейтерия попросту не могли бы сблизиться на достаточное расстояние и синтезировать ядро гелия. Однако в недрах звезд температура и давление столь высоки, что энергия

ядер приближается к порогу их синтеза (в нашем смысле, ядра находятся почти на краю барьера), в результате чего начинает действовать туннельный эффект, происходит термоядерный синтез - и звезды светят.

Наконец, туннельный эффект уже на практике применяется в технологии электронных микроскопов. Действие этого инструмента основано на том, что металлическое острое щупа приближается к исследуемой поверхности на сверхмалое расстояние. При этом потенциальный барьер не дает электронам из атомов металла перетечь на исследуемую поверхность. При перемещении щупа на предельно близком расстоянии вдоль исследуемой поверхности он как бы перебирает атом за атомом. Когда щуп оказывается в непосредственной близости от атомов, барьер ниже, чем когда щуп проходит в промежутках между ними. Соответственно, когда прибор «нащупывает» атом, ток возрастает за счет усиления утечки электронов в результате туннельного эффекта, а в промежутках между атомами ток падает. Это позволяет подробнейшим образом исследовать атомные структуры поверхностей, буквально «картографируя» их. Кстати, электронные микроскопы как раз и дают окончательное подтверждение атомарной теории строения материи.

4.12 Постулаты квантовой механики и ее математический аппарат

Классическая механика и электродинамика при попытке применить их объяснению атомных явлений приводили к результатам, находящимся в резком противоречии с экспериментом. Наиболее яркий тому пример - попытка применения классической электродинамики к модели атома, в которой электроны движутся вокруг ядра по классическим орбитам. При таком движении, как и при всяком движении зарядов с ускорением, электроны должны были бы непрерывно излучать энергию в виде электромагнитных волн и, в конце концов, — неизбежно упасть на положительно заряженное ядро. Таким образом — с точки зрения классической электродинамики - атом неустойчив. Как мы видим — этот тезис не соответствует действительности. Такое глубокое противоречие теории с экспериментом свидетельствует о том, что описание микрообъектов требует фундаментального изменения в основных классических представлениях и законах.

Из целого ряда экспериментальных данных (таких, как дифракция электронов) следует, что механика, которой подчиняются атомные явления - квантовая механика - должна быть основана на представлениях о движении, принципиально отличных от представлений классической механики. В квантовой механике не существует понятия траектории частиц, а, следовательно - и других динамических характеристик. **ЭТОТ ТЕЗИС СФОРМУЛИРОВАН В ПРИНЦИПЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕЙЗЕНБЕРГА: Нельзя со сколь угодно точностью одновременно измерить координату и импульс микрообъекта**

Известно, что полное описание состояния классической физической системы осуществляется за-

данием в начальный момент времени всех ее координат и скоростей. По этим данным уравнения движения полностью определяют поведение системы во времени. В квантовой механике, поскольку координаты и соответствующие им скорости не существуют одновременно, описание осуществляется меньшим числом величин, т.е. является менее подробным. Именно поэтому квантовая механика не может делать строго определенных предсказаний относительно будущего поведения микрообъекта, и ее задача состоит лишь в определении вероятности получения того или иного результата при измерении.

Естественно, что столь радикальное изменение физических представлений о движении требует и столь же радикального изменения математического аппарата. Основы этого были сформулированы как постулаты квантовой механики:

Постулат №1. Состояние частицы (или системы частиц) задано, если известна волновая функция $\Psi(q)$.

В квантовой механике состояние всей системы может быть описано функцией координат $\Psi(q)$, квадрат модуля которой определяет распределение вероятностей значений координат $|\Psi(q)|^2 dq$ — есть вероятность того, что произведенное над системой измерение обнаружит значение координат в элементе объема dq . Функцию $\Psi(q)$ называют волновой функцией системы. Волновая функция обязана удовлетворять ряду требований:

- Она должна быть непрерывной.
- Она должна быть однозначной.
- Она должна быть интегрируема с квадратом, т.е. интеграл $\int |\Psi(q)|^2 dq$ должен существовать.
- Она должна быть нормированной, т.е. этот интеграл должен быть равен 1.

Физический смысл последнего утверждения довольно прост и прозрачен: сумма вероятностей всех возможных значений координат равна единице, так как обнаружение объекта в любой точке пространства — есть событие достоверное.

Следует также отметить, что волновая функция системы может быть комплексной, и она определена лишь с точностью до фазового множителя $\exp(i\alpha)$, где α — вещественное число. Эта неопределенность не может быть устранена, однако она несущественна и не отражается на физических результатах.

Постулат №2. Волновые функции подчиняются принципу суперпозиции: если в состоянии с волновой функцией $\Psi_1(q)$ некоторое измерение приводит к результату X_1 , а в состоянии $\Psi_2(q)$ — к результату X_2 , то всякая функция вида $\Psi = C_1\Psi_1(q) + C_2\Psi_2(q)$ описывает такое состояние, в котором измерение дает либо результат X_1 , либо X_2 .

Постулат №3. Всякой физической величине L в квантовой механике сопоставлен линейный самосопряженный оператор. Единственно возможными величинами, которые может иметь эта физическая величина, являются собственные значения l операторного уравнения $L\Psi = l\Psi$.

Постулат №4. Возможная волновая функция состояния системы Ψ получается при решении дифференциального уравнения $i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi$, где H — оператор Гамильтона, а уравнение называется уравнением Шредингера.

Постулат №5. Если произвести многократные измерения какой-либо динамической переменной l системы, находящейся в состоянии Ψ , то на основании результатов этих измерений можно определить ее среднюю величину. Эта средняя величина вычисляется по формуле $l = \frac{\int \Psi^* L \Psi dq}{\int \Psi^* \Psi dq}$.

Содержание

1	Механика	2
1.1	Место механики в физике	2
1.2	Основные понятия механики	3
1.3	Принцип наименьшего действия	7
1.4	Принцип относительности Галилея	8
1.5	Законы сохранения	9
1.5.1	Теорема Нётер	9
1.5.2	Закон сохранения энергии	10
1.5.3	Сохранение импульса	11
1.5.4	Момент	11
1.6	Одномерное движение	12
1.7	Уравнения Гамильтона	14
1.8	Скобки Пуассона	17
1.9	Канонические преобразования	18
2	Специальная теория относительности	20
2.1	Принцип относительности и принцип постоянства скорости света	20
2.2	Одновременность и пространство	25
2.3	Замедление времени	26
2.4	Преобразования Лоренца	27
2.4.1	Лоренцево сокращение	28
2.4.2	Сложение скоростей	29
2.5	Экспериментальное подтверждение следствий из преобразований Лоренца	30
2.6	Импульс, масса и энергия	33
3	Электродинамика	36
3.1	Векторный анализ	36
3.1.1	Оператор набла	36
3.1.2	Дивергенция	37
3.1.3	Ротор	39
3.1.4	Градиент	40
3.1.5	Оператор Лапласа	40

4	Квантовая механика	42
4.1	Фотоэлектрический эффект 1899	42
4.2	Постоянная Планка 1900	43
4.3	Атом Бора 1913	44
4.4	Соотношение де Бройля 1924	46
4.5	Квантовая механика 1925	47
4.6	Принцип соответствия 1923	49
4.7	Принцип неопределенности Гейзенберга 1927	51
4.8	Принцип дополнительности 1927	55
4.9	Уравнение Шрёдингера 1926	57
4.10	Опыт Дэвиссона-Джермера 1927	59
4.11	Квантовый туннельный эффект 1924	60
4.12	Постулаты квантовой механики и ее математический аппарат	62