1. Основные уравнения с частными производными, используемые в математической физике, и основные проблемы, связанные с их решением и исследованием

1.1. Общие соображения

Описание различного рода процессов в механике, физике, химии, биологии и т.п. требует установления связей между различными величинами, характеризующими эти процессы. Эти связи могут быть описаны соотношениями как функциональными, в которых одни величины выражаются через другие, например, $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$, так и дифференциальными, в которых фигурируют производные одних величин по другим. Классическим примером является система соотношений

$$v = \frac{dS}{dt}, \quad p = mv, \quad \frac{dp}{dt} = F,$$

связывающая основные величины механики — путь S, время t, скорость v, импульс p и силу F. Сила в реальных задачах, как правило, зависит от положения тела, его скорости и момента времени $F = F\,(t, S, v)$, и исключением v и p мы получаем $\dfrac{d}{dt}\left(m\dfrac{dS}{dt}\right) = F\,(t, s, v)$ — второй закон Ньютона. Это обыкновенное дифференциальное уравнение, которые возникают при исследовании движения отдельного тела или системы тел, при котором внутреннее устройство этого тела и изменение этого внутреннего устройства несущественны.

Однако нам приходится сталкиваться и с другими ситуациями — поведение атмосферы, описание газового потока, обтекающего, например, самолет, процесс деформации листа металла при штамповке, тепловой и химический процесс в камере сгорания, электрическое и магнитное воздействие на движущиеся объекты и др. никак не вписываются в концепцию «тело». Все они описываются в терминах сплошной среды.

Сплошная среда — это однородная материя, твердая, жидкая или газообразная, которая сплошь заполняет некоторый объем, и состояние которой характеризуется поточечно — функциями, зависящими от времени и координат точки некоторого объема $u\,(t, x, y, z) = u(t, x)$, где или $x = (x^1, x^2, x^3)$.

«Независимых» переменных много, поэтому при описании дифференциальных соотношений часто приходится использовать частные производные — когда производится дифференцирование по одной переменной при фиксированных остальных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \qquad \frac{\partial u}{\partial x^1} = u_{x^1} = u_1.$$

Когда дифференциальное соотношение становится дифференциальным уравнением? Тогда, когда ему удовлетворяет целый класс процессов (например течений в газовой динамике или деформаций в теории упругости). В этом случае соотношение можно рассматривать как нечто самостоятельное и называть его дифференциальным уравнением. А полученные функции, которые описывают конкретные процессы — решением дифференциального уравнения.

Дифференциальным уравнением в частных производных называется уравнение

$$F\left(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^ku\right) = 0, \qquad Du = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right\}, \quad D^2u = \left\{\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^{j_1}\partial x^{j_2}}\right\}, \ldots,$$

связывающее несколько независимых переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$, функции от этих переменных $u^1, u^2, \ldots, u^m$ и частные производные этих функций по этим переменным.

Говорят, что уравнение имеет k-й порядок, если в уравнении фигурирует хотя бы одна производная k-го порядка и отсутствуют производные высших порядков.

Пример. Пусть $u = u(x, y)$. Рассмотрим уравнение $u_x = 0$.

В этом уравнении переменная y присутствует как параметр: дифференцирований по этой переменной не производится. Для того, чтобы решить уравнение, вспомним еще раз, что такое частное дифференцирование — это дифференцирование по одной из переменных при фиксированных остальных. Значит и решать уравнение необходимо по тому же принципу: зафиксируем y (например $y = 3$). Тогда для функции $u(x, 3)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $\dfrac{d}{dx}(u(x, 3)) = 0$, из которого следует $u(x, 3) \equiv C$. Теперь можно зафиксировать другое y (например $y = 5$), и аналогично получить дифференциальное уравнение $\dfrac{d}{dx}(u(x, 5)) = 0$, из которого следует $u(x, 5) \equiv \tilde{C}$. Совпадают ли C и $\tilde{C}$? Вообще говоря, не обязательно. Значит, каждому фиксированному значению y соответствует «свое» значение C, так что в результате мы получаем $u(x, y) = C(y)$.

Пример. Пусть u, как ранее, зависит от x и y. Рассмотрим уравнение $u_{xx} = 0$.

Рассматривая u_x как «неизвестную функцию», мы можем это уравнение проинтегрировать, как в предыдущем примере, и получить $u_x = C(y)$. Повторное интегрирование по тем же принципам (зафиксировать y, проинтегрировать, получить решение, и, меняя y, сделать «константу» интегрирования функцией от y) дает $u(x, y) = C_1(y)x + C_2(y)$.

Пример. Пусть $u = u(x, y, z)$. Рассмотрим уравнение $u_x = 0$.

Здесь для интегрирования необходимо фиксировать уже y и z, так что «константа» будет уже своей для каждой пары (y, z), т.е. $u(x, y, z) = C(y, z)$.

Вывод — решение ДУ в частных производных содержит, как правило, произвольные функции. Этих функций столько, каков порядок уравнения, а количество аргументов равно, грубо говоря, разности между количеством неизвестных и количеством уравнений.

Пример. Рассмотрим уравнение $u_x - u_y = 0$ и будем подбирать его решение в виде многочлена.

- многочлен 0-й степени — константа, очевидно, является решением;
- многочлен 1-й степени $u = ax + by$ является решением, если$u_x - u_y = a - b = 0$, т.е. если $a = b$ и $u(x, y) = a(x + y)$;
- многочлен 2-й степени $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ является решением, если $u_x - u_y = 2ax + 2by - 2bx - 2cy = 0$, т.е. если $u(x, y) = a(x + y)^2$.

Мы видим, таким образом, что решением нашего уравнения являются функции

$$(x + y)^0 \cdot a_0 = a_0, \quad (x + y)^1 \cdot a_1, \quad (x + y)^2 \cdot a_2, \quad \ldots \quad (x + y)^n \cdot a_n$$

а также их сумма. Лишь небольшое интеллектуальное усилие требуется для того, чтобы понять, что решением будет $u(x, y) = f(x + y)$. Правда, пока это только догадка. Конечно,

проверить, что любая функция указанного вида является решением легко, но как доказать обратное: что любое решение имеет именно такой вид?

Поскольку у нас явным образом возникла сумма $x + y$, можно попробовать сделать замену переменных, перейдя от x и y к $\tilde{x} = x + y$ и $\tilde{y}$ равной, например, $x - y$:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + y, \\ \tilde{y} = x - y. \end{cases}$$

Новую функцию обозначим через $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Она связана со старой соотношением

$$\tilde{u}(x + y, x - y) = u(x, y).$$

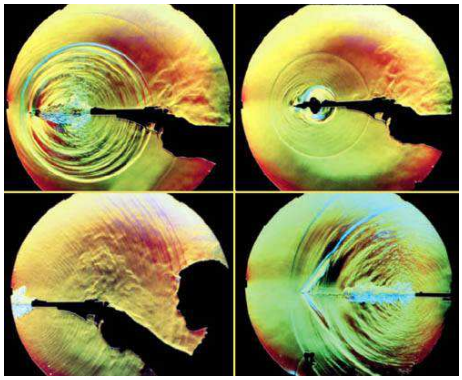
Вычислим, пользуясь этим соотношением, производные:

$$u_x = \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}}, \quad u_y = \tilde{u}_{\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{y}}.$$

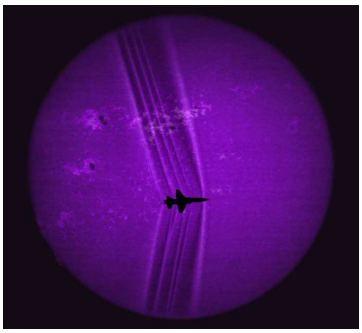
Тогда наше уравнение приобретает вид $2\tilde{u}_{\tilde{y}} = 0$. А его общими решениями, как мы уже выяснили, будет $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}) = f(x + y)$.

Вывод — для решения уравнения постоянно нужно делать замену переменных и переходить в новую систему координат.

1.2. Проблема обобщенных решений



Рассмотренные примеры дают нам некоторые формулы, но для того, чтобы их использовать, необходимо налагать какие-то требования на произвольную функцию. В первом примере таких требования не возникло, но это скорее исключение, чем правило. Уже в случае достаточно элементарного уравнения $u_x - u_y = 0$ в формуле решения $u(x, y) = f(x + y)$ необходимо предполагать, что f дифференцируема, (а точнее непрерывно дифференцируема) — иначе мы просто не сможем подставить ее в уравнение.



Таким образом первое понятие решения — это *классическое решение*. От произвольных функций требуется полная дифференцируемость и непрерывность.

Но в некоторых случаях (например, ударные волны в аэродинамике) нет непрерывной дифференцируемости, но дифференциальное уравнение составлять надо. Появляется необходимость рассматривать обобщенные решения, т.е. решения, которые не совсем удовлетворяют дифференциальному уравнению.

Проблема обобщенных решений имеет два аспекта.

1. До какой степени можно пренебрегать уравнением. Ведь если разрешается пренебрегать уравнением в одной точке, то уже ничто не помешает пренебречь им и в другой. А где тогда предел? Если пренебречь уравнением во всех точках, то получится абсурд: любая функция будет решением любого уравнения. Кроме того это

бессмысленно и с физической точки зрения: ведь уравнение — это общее дифференциальное соотношение, которому все решения все-таки подчинены, это то свойство, которым физический процесс обладает.

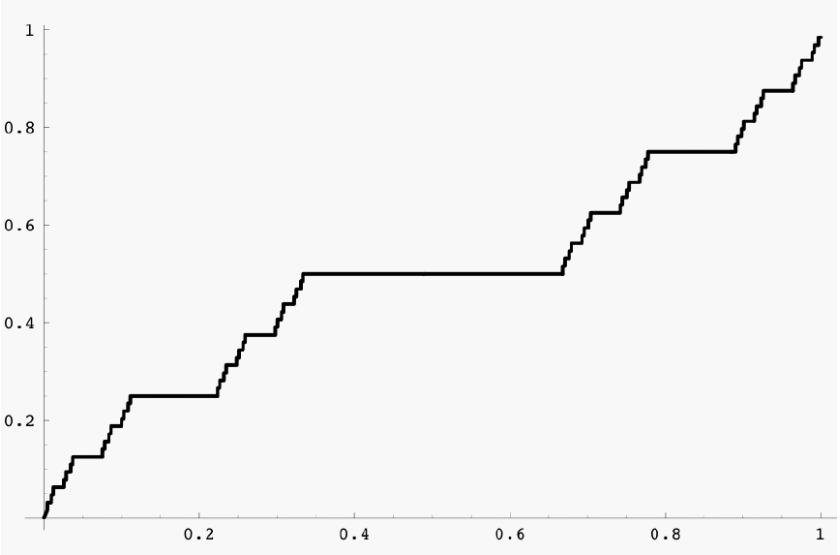
Пример.

$$\dot{x} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = f(x) .$$

При $t = 0$ производной нет. И не надо! $x = |t|$ — обобщенное решение.

$$x = \int_0^t f(s)\, ds + C.$$

Гипотеза: пренебрегаем пока есть интеграл. Под интегралом может стоять $f(s)$ непрерывная почти всюду, т.е. имеющая разрывы на множестве меры нуль. Но не тут-то было, существует функция, производная которой почти всюду равна нулю, а сама функция имеет непостоянное решение — функция Кантора.



В обычных уравнениях проблема обходится введением понятия абсолютно непрерывной функции (функция Кантора как раз не является абсолютно непрерывной), и обобщенное решение — это функция, которая абсолютно непрерывна и удовлетворяет дифференциальному уравнению почти всюду.

В уравнениях же с частными производными для введения обобщенных решений используют другие подходы, т.к. понятие абсолютной непрерывности для функций нескольких переменных отсутствует.

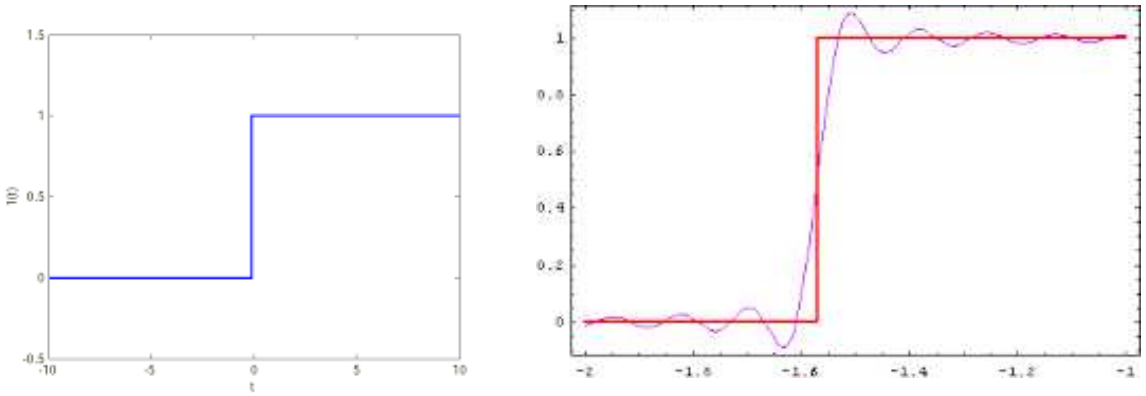
2. Второй аспект состоит в том, что решение проблемы должно быть достаточно общим. Дело в том, что начиная с первой четверти XX века в обиход механики и физики было введено огромное количество уравнений: в аэродинамике (*с вихрями и без вихрей; сверхзвуковые и дозвуковые течения; смеси однородные и неоднородные; идеальные газы и неидеальные газы* и т.д.), в гидродинамике (*с теплообменом и без теплообмена; среда вязкая среда и невязкая; среда сжимаемая и несжимаемая; жидкость*

идеальная и неидеальная и т.д.), в теории упругости (*с конечными и с дифференциальными соотношениями; с памятью; с вязкостью; с пластичностью; однородная среда; неоднородная изотропная и неизотропная среда* и т.д.), в электромагнетизме (*в твердых телах; в жидкостях; однородная и неоднородная изотропная среда; в плоском пространстве; в искривленном пространстве* и т.д.). Многие соотношения в этих уравнениях являются гипотетическими. Так что вопрос о корректности тех моделей, которые исследуются, приходится решать в самой общей постановке.

Подходов, позволяющих задавать обобщенные решения, по существу, два.

Первый основывается на физическом соображении, что негладкая функция есть некая идеальная вещь, являющаяся пределом гладких функций. Например, $|x|$. С математической точки зрения это как-то не очень понятно, с чего это вдруг модель надо считать пределом. Но вот возьмем струну, натянем ее и приложим к ней точечную силу. Она примет треугольную форму, напоминающую деформированный модуль, и иногда эту форму через модуль и описывали. Но реально силу в точке приложить невозможно. Так что эта форма на самом деле является некоторой идеализацией, очень удобной, но достижимой только в воображении путем предельного перехода.

Точно так же разрывная функция может считаться просто идеализацией «быстро растущей за короткое время» функции. В переходной зоне все может быть и вовсе не гладко. Возможно и всякое экзотическое поведение, например, известно явление Гиббса. Но это может не влиять на интересующие нас вопросы и может не сказываться на измерениях. Таким образом, если мы имеем какие-то функции u_n, являю-



щиеся решением уравнения, и если эти функции сходятся к некоторой функции u в том или ином смысле $u_n \to u$, то u можно считать обобщенным решением.

Здесь главное искусство состоит в том, чтобы подобрать сходимость, не противоречащую, с одной стороны, смыслу задачи, а с другой стороны — дающую разумный результат.

Второй менее прямолинеен, и основывается на соображениях более глубоких, хотя и не менее физических. Возьмем, к примеру, термометр. Что он показывает? На самом деле он показывает объем, занимаемый рабочей жидкостью. Этот объем зависит от температуры. Но термометр не может быть нагрет «абсолютно равномерно». С

одной стороны на него светит солнце, а с другой — тень. Сбоку подул ветерок, он охлаждает. То есть показания термометра — это нечто среднее, интегральное.

$$T = \frac{1}{L}\int T\,(l)\,dl.$$

Такая ситуация с измерением «средненной» величины постоянно встречается в физике, а в квантовой механике, где все измерения носят опосредованный характер, она вообще возводится в принцип: измеренная величина — это всегда нечто среднее:

$$T = \int\limits_{\Omega} \tau\,(x)\varphi\,(x)\,dx,$$

здесь $\varphi\,(x)$ — свойство измеряющего прибора.

В математике эта концепция нашла выражение в виде установления соответствия между функцией $y\,(x)$ и порождаемыми его отображениями, называемыми функционалами:

$$y\,(x) \to F\,(\varphi) = \int\limits_{\Omega} y\,(x)\varphi\,(x)\,dx.$$

Вопрос об обратном соответствии очень и очень сильно зависит от класса «измеряющих» функций $\varphi\,(x)$. Первый результат, касающийся обратного соответствия был установлен Риссом. Если $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная, то существует функция ограниченной вариации $\sigma\,(x)$ такая, что $(\varphi) = \int\limits_a^b \varphi\,(x)\,d\sigma\,(x)$ — интеграл Стильтьеса, $(y = \sigma'\,(x))$.

Поэтому теоремы об обратном соответствии обычно называют теоремами Рисса.

$$\varphi \in L_2, \quad F\,(\varphi) = \int y(x)\varphi(x)dx, \quad y \in L_2.$$
$$\varphi \in L_p, \quad F\,(\varphi) = \int y(x)\varphi(x)dx, \quad y \in L_{p'}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Использование функциональной точки зрения и позволяет ввести обобщенное дифференцирование и, соответственно, обобщенные решения.

$$\int\limits_a^b y'\varphi dx = y\varphi\Big|_a^b - \int\limits_a^b y\varphi' dx.$$

Если $\int\limits_a^b y\varphi' dx = -\int\limits_a^b z\varphi dx$ верно для всех φ из некоторого класса, $\varphi\,(a) = \varphi\,(b) = 0$, то z называют **обобщенной производной** от y. Обычно φ берут бесконечно дифференцируемой и обращающейся в нуль на концах отрезка. Аналогичная конструкция реализуется и в многомерном случае.

Функцию u называют **обобщенным решением** дифференциального уравнения $Lu = 0$, если $(u, L^*\varphi)\, dx = 0$, или

$$\int\limits_{\Omega} uL^*\varphi dx = 0,$$

где $L\varphi$ — сопряженный оператор.

Здесь, как и в аппроксимативном подходе, требуется определенное искусство. Оно требуется и в выборе класса, и в выборе интегральной формы функционала.

1.3. Представление решений

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнениях с частными производными вопрос о форме представления решений является весьма сложным. Наиболее распространенными являются:

1. конечные формулы;
2. бесконечные представления.

Для получения конечных формул обычно используют сведение к дифференциальному уравнению.

Пример. Решение уравнения $\triangle u = f$, $x \in \mathbb{R}^3$ описывается формулой

$$u\,(x) = \int_V \frac{f\,(\tilde{x})}{|x - \tilde{x}|} dV, \quad x \neq \tilde{x}.$$

Эта формула содержит функцию $\dfrac{1}{|x - \tilde{x}|}$, являющуюся решением уравнения $\triangle u = 0$ при $x \neq \tilde{x}$. Интересующая нас функция получается, если в уравнение Лапласа подставить «радиальную» функцию $u = u\,(|x - \tilde{x}|)$, и решить полученное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $u\,(r)$.

Пример. Поиск аналогичным образом радиального решения u уравнения Гельмгольца $\triangle u + k^2 u = f$ приводит к уравнению Бесселя, которое просто не решается, и вообще не решается в элементарных функциях.

Существенным идейным моментом теории уравнений с частными производными является то, что если мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое в элементарных функциях не решается, то решение этого уравнения мы «вводим», добавляя его к семейству элементарных функций. Так появляются функции Бесселя $J_v\,(x)$ и $I_v\,(x)$, являющиеся решением уравнения Бесселя.

Все эти «дополнительные» функции называются **специальными** и используют их в расчетах так же, как используются синусы и косинусы.

Из бесконечных представлений в качестве наиболее употребимых следует назвать представление в виде рядов Фурье (пока можно считать тригонометрических рядов), в виде степенных рядов, асимптотических рядов.

С бесконечными представлениями связана проблема приближенного представления решения. Например, когда мы берем несколько членов ряда. Здесь появляется вопрос о том, как оценивать точность приближения, т.е. разность между точным решением и приближенным? Дело в том, что отличие двух функций может быть охарактеризовано разным

способом (например, равномерным или интегральным образом) и это дает разные результаты. Поэтому при постановке задач для уравнений с частными производными играет центральную роль вопрос о том, как предполагается измерять расстояние между функциями. На математическом языке этот вопрос звучит как вопрос о выборе функционального пространства.

2. Виды уравнений с частными производными первого порядка

2.1. Простейшие уравнения

Как мы выяснили, функция $u(x,y)$, являющаяся решением уравнения $u_x = 0$, имеет вид $u(x) = C(y)$.

Если уравнение неоднородное, например $u_x = f(x,y)$, то интегрируя частным образом по x (т.е. при фиксированном y), мы получаем

$$u(x,y) = \int f(x,y)\,dx + C(y).$$

Если функция u зависит от нескольких переменных $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то решение однородного уравнения $u_{x_n} = 0$ будет иметь вид

$$u(x_1, \ldots, x_n) = C(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

а решение неоднородного уравнения $u_{x_n} = f(x_1, \ldots, x_n)$ будет описываться формулой

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int f(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)\,ds + C(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

с частным интегрированием по последней переменной.

2.2. Линейные уравнения

2.2..1 Однородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} + \ldots + a_n u_{x_n} = 0.$$

Подберем замену

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ \ldots \\ \tilde{x}_n = \alpha_{n1} x_1 + \ldots + \alpha_{nn} x_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

так, чтобы функция $u = u(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{u}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ оказалась решением простого уравнения. Вычислим производные

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= \tilde{u}_{\tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_n} \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_1} = \alpha_{11} \tilde{u}_{\tilde{x}_n} + \alpha_{21} \tilde{u}_{\tilde{x}_2} + \ldots + \alpha_{n1} \tilde{u}_{\tilde{x}_n}, \\ &\ldots \\ u_{x_n} &= \alpha_{1n} \tilde{u}_{\tilde{x}_1} + \ldots + \alpha_{nn} \tilde{u}_{\tilde{x}_n}. \end{aligned}$$

Подставив в исходное уравнение, получим

$$a_1 u_1 + \ldots + a_n u_{x_n} = (a_1 \alpha_{11} + \ldots + a_n \alpha_{1n})\,\tilde{u}_{\tilde{x}_1} + \ldots + (a_1 \alpha_{n1} + \ldots + a_n \alpha_{nn})\,\tilde{u}_{\tilde{x}_n} = 0.$$

Выберем $\{\alpha_{ij}\}$ таким образом, чтобы все скобки, кроме последней, были равны нулю, а последняя была равна единице. Тогда в новых переменных уравнение приобретает вид $\tilde{u}_{\tilde{x}_n} = 0$ и имеет решение[1]

$$\begin{gathered} \tilde{u} = C(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}), \\ u = C(\tilde{x}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{x}_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)). \end{gathered}$$

[1]Произвол в выборе коэффициентов α не влияет на решение, так как это компенсируется произвольной

2.2..2 Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Теорема 2..1 *Общее классическое решение уравнения*

$$a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} + \ldots + a_n u_{x_n} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

описывается формулой $u = \int\limits_{\substack{I_1=\tilde{x}_1 \\ \ldots \\ I_{n-1}=\tilde{x}_{n-1} \\ I_n=s}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)\, ds + C(I_1(x), \ldots, I_{n-1}(x))$, *где через* I_i *обозначены функции, определяющая замену переменных* $x \to \tilde{x}_i$, C — *произвольная гладкая функция.*

Доказательство. Выполним в уравнении замену (2.1). Получим уравнение

$$\tilde{u}_{\tilde{x}_n} = f(x_1(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n), \ldots, x_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)) = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n),$$

интегрирование которого дает формулу

$$\tilde{u} = \int\limits_0^{\tilde{x}_n} f(x_1(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, s), \ldots, x_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, s))\, ds + C(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}).$$

Здесь интегрирование производится при фиксированных значениях $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}$. Возвращаясь к старым переменным, получаем искомый вид решения. ■

2.2..3 Однородные уравнения с переменными коэффициентами

$$a_1(x)\, u_{x_1} + a_2(x)\, u_{x_2} + \ldots + a_n(x)\, u_{x_n} = 0.$$

Поскольку коэффициенты непостоянные, надеяться, что линейная замена с постоянными коэффициентами упростит уравнение безнадежно. А замены с переменными коэффициентами оказываются уже заменами общего вида. Поэтому мы постараемся подобрать замену общего вида

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = I_1(x), \\ \ldots \\ \tilde{x}_n = I_n(x), \end{cases} \tag{2.2}$$

постоянной C. Например, если для функции u, зависящей от x, y, z, решение уравнения $u_z = 0$ имеет вид $u = C(x, y)$, то выполнение в этой формуле замены

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + y, \\ \tilde{y} = x - y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2}, \\ y = \dfrac{\tilde{x} - \tilde{y}}{2}, \end{cases}$$

приводит к представлению $C(x, y) = C\left(\dfrac{\tilde{x} + \tilde{y}}{2}, \dfrac{\tilde{x} - \tilde{y}}{2}\right) = \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Таким образом, произвольная функция от старых переменных преобразуется в произвольную функцию от новых переменных.

с некоторыми функциями $I_1, \ldots, I_n$ так, чтобы уравнение упростилось. Вычисление производных дает

$$u_{x_1} = \tilde{u}_{\tilde{x}_1} \frac{\partial I_1}{\partial x_1} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_n} \frac{\partial I_n}{\partial x_1},$$
$$\ldots$$
$$u_{x_n} = \tilde{u}_{\tilde{x}_1} \frac{\partial I_1}{\partial x_n} + \ldots + \tilde{u}_{\tilde{x}_n} \frac{\partial I_n}{\partial x_n},$$

и тогда

$$a_1(x) u_{x_1} + \ldots + a_n(x) u_{x_n} =$$
$$= \left(a_1(x) \frac{\partial I_1}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x) \frac{\partial I_1}{\partial x_n} \right) \tilde{u}_{\tilde{x}_1} + \ldots + \left(a_1(x) \frac{\partial I_1}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x) \frac{\partial I_1}{\partial x_n} \right) \tilde{u}_{\tilde{x}_n} = 0.$$

Для того чтобы уравнение свелось к простейшему $u_{\tilde{x}_n} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} a_1(x) \dfrac{\partial I_1}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x) \dfrac{\partial I_1}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots \\ a_1(x) \dfrac{\partial I_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x) \dfrac{\partial I_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \\ a_1(x) \dfrac{\partial I_n}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x) \dfrac{\partial I_n}{\partial x_n} = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $I_1, \ldots, I_{n-1}$ должны быть решением того же самого уравнения, решение которого мы ищем! Получается «замкнутый круг». Разорвать его помогает совершенно случайно тот факт, что первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x), \end{cases} \tag{2.3}$$

удовлетворяет как раз дифференциальному уравнению с частными производными. Действительно, если $x(t)$ — решение, а $I(x) = I(x_1, \ldots, x_n)$ — интеграл, то

$$I(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv const,$$

и

$$\frac{d}{dt} I(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{\partial I}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial I}{\partial x_n} \dot{x}_n = \frac{\partial I}{\partial x_1} a_1(x) + \ldots + \frac{\partial I}{\partial x_n} a_n(x).$$

В силу произвола выбора решения $x(t)$, полученное равенство должно быть выполнено для любого x, что и дает уравнение с частными производными.

$$\frac{d}{dt} I(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{\partial I}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial I}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \ldots + \frac{\partial I}{\partial x_n} \dot{x}_n.$$

Система уравнений (2.3) называется **системой уравнений характеристик** для уравнения с частными производными, а ее решения — **характеристиками** уравнения с частными производными.

Общее же решение уравнения с частными производными будет, по-видимому, иметь вид $u = C(I_1, ..., I_{n-1})$, где C — произвольная постоянная функция. Мы обоснуем это в следующем пункте.

2.2..4 Неоднородные уравнения с переменными коэффициентами

Теорема 2..2 *Общее классическое решение уравнения*

$$a_1(x)u_{x_1} + a_2(x)u_{x_2} + \ldots + a_n(x)u_{x_n} = f(x_1, \ldots, x_n), \quad a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0,$$

описывается формулой

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{\substack{I_1=\tilde{x}_1 \\ \ldots \\ I_{n-1}=\tilde{x}_{n-1} \\ I_n=s}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, s)\, ds + C(I_1(x), \ldots, I_{n-1}(x)),$$

где I_i — функционально независимая система первых интегралов системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x,u), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x,u), \end{cases}$

C — произвольная гладкая функция.

Доказательство. Пусть $I_1(x), \ldots, I_{n-1}(x)$ — функционально независимая система из первых интегралов (существование такой системы из $n-1$ функции обосновывается в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений). Пусть $I_n(x)$ — произвольная функция, независимая $I_1(x), \ldots, I_{n-1}(x)$. Сделаем замену переменных (2.2), и тогда уравнение будет иметь вид

$$\tilde{u}_{\tilde{x}_n} = f(x_1(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n), \ldots, x_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)),$$

и его общее решение описывается функцией

$$\tilde{u} = \int\limits_0^{\tilde{x}_n} f(x_1(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, s), \ldots, x_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}, s))\, ds + C(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1}),$$

что после перехода к старым переменным дает искомое выражение. Равенства под знаком интеграла означают, что интегрирование происходит при постоянных значениях $I_1, \ldots, I_{n-1}$ по переменной, совпадающей со значением I_n. ■

2.3. Квазилинейные уравнения

Квазилинейными называют уравнения, в которых коэффициенты зависят от u:

$$a_1(x,u)\, u_{x_1} + a_2(x,u)\, u_{x_2} + \ldots + a_n(x,u)\, u_{x_n} = f(x_1, \ldots, x_n, u).$$

Теорема 2..3 *Общее классическое решение уравнения*

$$a_1(x,u)\, u_{x_1} + a_2(x,u)\, u_{x_2} + \ldots + a_n(x,u)\, u_{x_n} = f(x_1, \ldots, x_n, u), \quad a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0,$$

с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами $a_1(x,u)$, …, $a_n(x,u)$, описывается неявным образом в виде $\Psi(x,u) = C(I_1(x,u), \ldots, I_n(x,u)) = 0$, где I_i — система из n функционально независимых первых интегралов системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x,u), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x,u), \\ \dot{u} = f(x,u), \end{cases}$

C — произвольная гладкая функция.

Доказательство. К этому уравнению можно подойти формально, записав, как и для линейного уравнения, систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x,u), \\ \qquad \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x,u). \end{cases} \tag{2.4}$$

Однако эта система имеет существенный недостаток: в ней фигурирует величина u, связь которой с x неизвестна (собственно говоря, именно ее мы и ищем). Для того, чтобы разобраться с возникающей проблемой, рассмотрим простейший случай:

$$a(x,u)\,u_{x_1} = f(x,u).$$

Поскольку дифференцирование по $x_2, \dots, x_n$ отсутствует, это обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $u(x_1)$ с параметрами $x_2, \dots, x_n$

$$a(x,u)\,du - f(x,u)\,dx_1 = 0.$$

Как решать такие уравнения? В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений вы с такими уравнениями сталкивались, при этом решение искалось не в форме прямой или обратной функции, а в форме *неявной функции* $F(x,u) = C$, например $u + e^u = x$. Выразить отсюда u через x формулой не удается, но, тем не менее, по каждому значению x соответствующее значение u определяется однозначно, т.е. это и в самом деле функциональная зависимость.

Применим это соображение к нашему уравнению, т.е. будем предполагать, что его решение задано в виде $\Psi(x,u) = 0$, где Ψ — некоторая функция. Если $u(x_1, \dots, x_n)$ — решение уравнения, то

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0,$$

и, дифференцируя по x_k, получаем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \equiv 0.$$

Отсюда находим $u_{x_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ (при этом необходимо предполагать, что $\dfrac{\partial \Psi}{\partial u} \neq 0$):

$$u_{x_k} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \Big/ \frac{\partial \Psi}{\partial u},$$

и, подставляя их в уравнение, получаем

$$a_1(x,u)\,\Psi_{x_1} + a_2(x,u)\,\Psi_{x_2} + \dots + a_n(x,u)\,\Psi_{x_n} = -f(x,u)\,\Psi_u.$$

Это обычное линейное однородное уравнение, только относительно функции $\Psi(x,u)$. Его решение имеет вид

$$\Psi(x,u) = C(I_1(x,u), \dots, I_n(x,u)) = 0, \tag{2.5}$$

где $I_1, \dots, I_n$ — система из n функционально независимых первых интегралов системы (2.4), дополненной уравнением $\dot{u} = f(x,u)$. ∎

В полученном выражении функция задана неявно. Если есть возможность, то соотношение (2.5) желательно разрешить относительно u. Однако, получить явное выражение

для u получается не всегда. Поэтому форму (2.5) считают вполне легальной формой решения квазилинейного уравнения.

Систему уравнений (2.4), дополненную уравнением $\dot{u} = f(x, u)$, называют **системой характеристик квазилинейного уравнения**, а ее решения — **характеристиками**.

Следует заметить, что для квазилинейного уравнения характеристики оказываются линиями, лежащими в $(n+1)$–мерном пространстве переменных $(x_1, \ldots, x_n, u)$. Проектирование этих линий на n–мерное пространство может порождать различные *особенности* — изломы, пики и т.п.

2.3..1 Разрывы решений квазилинейных уравнений. Общий подход

Рассмотрим уравнение $u_t + uu_x = 0$. Это уравнение описывает одномерное течение газа в трубе, $u(x)$ — скорость потока в момент t в точке x. Система уравнений характеристик имеет вид:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}.$$

Из нее получаем уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} u &= c_1, \\ x - c_1 t &= c_2, \\ x - ut &= c_2. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение нашего уравнения описывается формулой $\Phi(u, x - ut) = 0$,

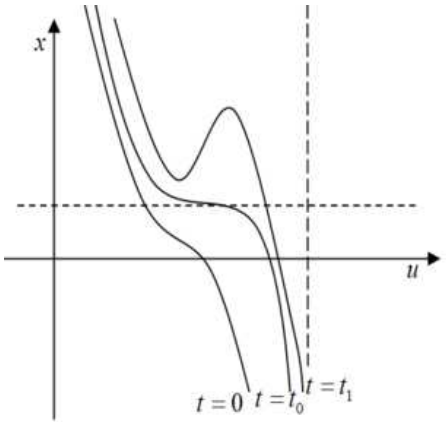


Рис. 1:

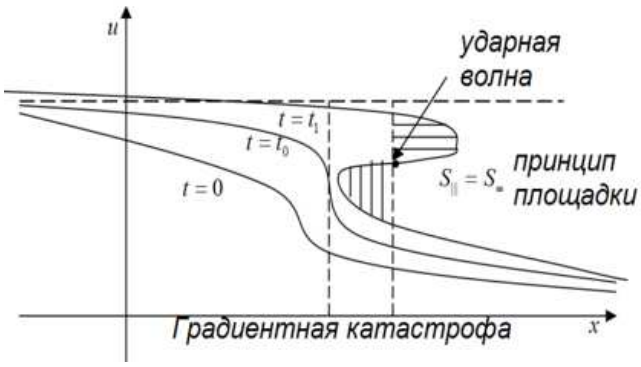


Рис. 2:

где Φ — произвольная функция. Полученное соотношение разрешить относительно u достаточно сложно, поскольку оно входит в оба аргумента. А вот относительно xоно разрешается тривиальным образом

$$\begin{aligned} x - ut &= \varphi(u), \\ x &= ut + \varphi(u), \end{aligned}$$

где φ — произвольная функция. Полученное соотношение очень удобно: оно позволяет для ряда последовательных значений t строить график $x(u)$, а затем, просто отражая его, получать график $u(x)$.

По графику видно, что даже если при $t = 0$ функция $x(u)$ (а значит, и обратная к ней $u(x)$) была строго убывающей, в некоторый момент ($t = t_0$) у этого графика появится точка с горизонтальной касательной, а затем (например, при $t = t_1$) функция будет уже немонотонной (см. рис. 1).

Отражая полученные ранее графики относительно прямой $x(u)$, мы получаем уже графики зависимости $u(x)$ при разных значениях t.

На рисунке (2) отчетливо виден эффект, на который мы хотели бы обратить внимание: в момент времени $t = t_0$ касательная становится вертикальной (а значит, производная $u'_x(t, x)$ обращается в бесконечность, это явление называют **градиентной катастрофой**), а затем зависимость $u(x)$ вообще перестает быть однозначной функцией, поскольку одному и тому же значению x соответствуют три значения функции.

Конечно, если в случае газового потока это еще можно как-то интерпретировать физически (например, что течение расслоилось на три фазы, каждая из которых движется со своей скоростью), то в каком-то другом случае (например, если $u(x)$ — плотность) использование многозначной функции оказывается абсурдным. Физики и механики в этих случаях используют какие-то дополнительные соображения, в силу которых удается сделать решение однозначным; обычно это осуществляется введением скачка, так что график приобретает вид (см. рис. 3) и этот скачок называют **ударной волной**. Правда, непонятно, в какой точке этот скачок должен быть, ведь его можно сделать и правее, и левее (см. рис. 4). Опять же из дополнительных физических соображений определяется место скачка (обычно при этом используется «**закон площадей**» — *«отрезанные» площади справа и слева от ударной волны должны быть равными*, что связано с термодинамическим законом неубывания энтропии.

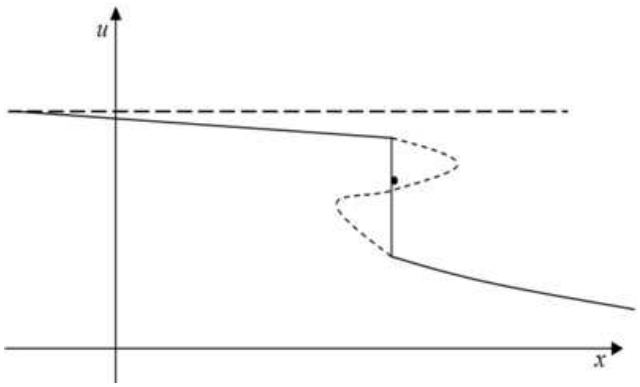


Рис. 3: Схема ударной волны

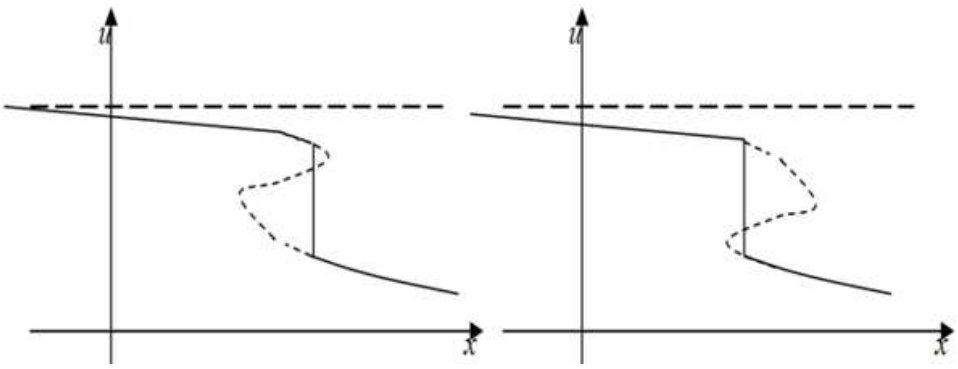


Рис. 4:

Основная мораль, которую необходимо вынести из этого рассмотрения, следующая:

1. для квазилинейных уравнений решения, даже порожденные «хорошими», гладкими начальными данными, могут со временем «разрушаться», т.е. выходить на градиен-

тную катастрофу, после которой «математические» средства предсказания дальнейшего поведения уже не работают;

2. использование физических соображений приводит к функциям, которые являются уже разрывными, и решениями исходного уравнения их можно считать уже только в очень сильно условном, обобщенном смысле.

3. Обобщенные решения уравнений первого порядка

Таким образом, мы видим не просто необходимость, а даже неизбежность рассмотрения обобщенных решений для уравнения первого порядка. Как уже говорилось, идея обобщенного понимания решения происходит из функции и связана с представлением об измерении какой-то величины как о вычислении некоторого функционала: интеграла от этой величины по некоторой области:

$$F(x) \to \int\limits_{\Omega} F(x)\, dv \quad \text{или} \quad \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\, F(x)\, dv,$$

если «измеряющий» прибор измеряет неравномерно (что описывается функцией $\varphi(x)$). Обычно в теории уравнений с частными производными интеграл для упрощения вычислений распространяют на все пространство $\mathbb{R}^n$, продолжая $\varphi(x)$ за пределы области Ω нулем.

Тогда дифференциальное уравнение также интегрируется как «равенство функционалов»:

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(t,x)\,(u_t + uu_x)\, dtdx$$

для любой финитной[2] функции $\varphi(t,x)$. Поскольку в правой части можно выполнить интегрирование по частям, перебросив производную с u на φ, это равенство приобретает вид

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\varphi_t u + \varphi_x \frac{u^2}{2}\right) dtdx = 0 \tag{3.1}$$

которое и используют для определения обобщенного решения: функция $u(t,x)$ называется обобщенным решением уравнения $u_t + uu_x = 0$, если для нее равенство (3.1) выполнено для всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t,x)$.

Изучим теперь вопрос, какой вид имеют обобщенные решения в тех простейших ситуациях, которые мы рассматривали ранее.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u_{x_n} = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{3.2}$$

Его общее решение, как мы выяснили, имеет вид:

$$u = \int\limits_{\substack{x_1 = c_1 \\ \ldots \\ x_{n-1} = c_{n-1}}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n + C(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Перепишем теперь уравнение в виде

$$-u_{x_n} + f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

[2] обычно ее еще предполагают и бесконечно дифференцируемой, хотя для уравнений первого порядка достаточно и однократной непрерывной дифференцируемости

Умножим полученное равенство на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по частям. Получим:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-u_{x_n} + f(x_1, \ldots, x_n)\right) \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(u\varphi_{x_n} + f\varphi\right) dx_1 \ldots dx_n = 0. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) позволяет нам дать определение обобщенного решения:

$u(x_1, \ldots x_n,)$ называется обобщенным решением уравнения (3.2), если выполнено (3.3) для любой финитной, бесконечно дифференцируемой функции φ.

Покажем, что формула (3.1) дает обобщенное решение, если функции f и C являются не только негладкими, но даже разрывными. Действительно, если $C(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\int f dx_n$ интегрируемы по $\mathbb{R}^n$, то:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi_{x_n} \left[\int\limits_{\substack{x_1 = c_1 \\ \ldots \\ x_{n-1} = c_{n-1}}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n + C(x_1, \ldots, x_{n-1}) \right] + f(x_1, \ldots x_n)\, \varphi \right) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} C(x_1, \ldots, x_{n-1}) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi_{x_n} dx_n \right] dx_1 \ldots dx_{n-1}}_{0} + \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\varphi \int f dx_n \right] dx_n \right] dx_1 \ldots dx_{n-1}}_{0} = 0.$$

Пример. Аналогично предыдущему уравнению, для уравнения

$$a^1(x)\, u_{x_1} + \ldots + a^n(x)\, u_{x_n} = b(x)\, u + c(x) \quad (3.4)$$

функция u будет считаться обобщенным решением, если для любой финитной и бесконечно дифференцируемой функции φ выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left[\left(a^1\varphi\right)_{x_1} + \ldots + \left(a^n\varphi\right)_{x_n} + b\varphi \right] u + c(x)\, \varphi \right) dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

($a^1(x)$ непрерывно дифференцируемы). Выражение в квадратных скобках может быть представлено в виде

$$\left[\left(a^1_{x_1} + \ldots + a^n_{x_n}\right) \varphi + \left(a^1\varphi_{x_1} + \ldots + a^n\varphi_{x_n}\right) + b\varphi \right] = \left[(\nabla, a)\, \varphi + (a, \nabla)\, \varphi + b\varphi \right],$$

т. к.

$$a^1_{x_1} + \ldots + a^n_{x_n} = \frac{\partial}{\partial x_1} a^1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} a^n = (\nabla, a), \quad a^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\varphi + \ldots + a^n \frac{\partial}{\partial x^n}\varphi = (a, \nabla)\, \varphi.$$

что дает для определения обобщенного решения более компактную формулу:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left[(\nabla, a)\, \varphi + (a, \nabla)\, \varphi + b\varphi \right] u + c\varphi \right) dx_1 \ldots dx_n = 0.$$

Уравнение (3.4) мы уже решали, для него система характеристик имеет вид:

$$\frac{dx_1}{a^1} = \frac{dx_2}{a^2} = \ldots = \frac{du}{b(x)\,u + c(x)},$$

первые интегралы имеют вид:

$$\begin{gathered} I_1(x) = c_1, \\ I_2(x) = c_2, \\ \ldots \\ I_{n-1}(x) = c_{n-1}, \\ I_n(x,u) = c_n, \end{gathered}$$

причем от u зависит только один (последний) интеграл. Общее решение имеет вид:

$$\Phi\left(I_1(x), \ldots, I_{n-1}(x), I_n(x,u)\right) = 0.$$

Это соотношение можно разрешить сначала по I_n:

$$I_n(x,u) = \varphi\left(I_1, \ldots, I_{n-1}\right),$$

а затем выразить из него u, что дает представление решения в виде

$$u = u_{CN} + z(x)\,\tilde{\varphi}\left(I_1, ..., I_{n-1}\right), \tag{3.5}$$

что вполне отвечает нашим представлениям о структуре общего решения неоднородного уравнения. Это решение — сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения уравнения однородного. Более того, решение однородного уравнения представимо в виде фиксированного решения (тоже однородного уравнения) и решения

$$\upsilon(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\left(I_1, \ldots, I_{n-1}\right)$$

уравнения

$$a^1 \upsilon_{x_1} + \ldots + a^n \upsilon_{x_n} = 0$$

уже не содержащего u. Несмотря на такую компактную форму записи, с ней при изучении обобщенного решения практически ничего не удается сделать. В случае простейшего уравнения ситуация была очень удачной:

$$I_1 = x_1, \quad I_2 = x_2, \quad \ldots, \quad I_{n-1} = x_{n-1},$$

и поэтому интегрирование по $\mathbb{R}^n$ «делилось» на интегрирование по $\mathbb{R}^{n-1}$ (т.е. по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$) и интегрирование по последней переменной. За счет того, что произвольная функция не зависела от x_n, она выносилась за знак интеграла, и интеграл явно вычислялся.

В нашем же случае произвольная функция зависит от $I_1, \ldots, I_{n-1}$, каждый из которых зависит, вообще говоря, от всех $x_1, \ldots, x_n$, так что для того, чтобы «расслоить» интегрирование по $\mathbb{R}^n$ на два интегрирования так, чтобы во внутреннем интеграле произвольная функция выносилась за знак интеграла, необходимо, чтобы внутреннее интегрирование

осуществлялось при фиксированных значениях $I_1, \ldots, I_{n-1}$, а наружное осуществлялось уже по этим значениям.

Выполнять такое «расслоение» достаточно сложно, тем более, что интегрирование по поверхностям вы не изучали достаточно глубоко, поэтому здесь лучше выбрать другой путь. Он связан с пониманием того, что $I_1, \ldots, I_{n-1}$ задают некую новую систему переменных, в которой уравнение приобретает более простой вид, и поэтому самое разумное, что можно сделать в этой ситуации — это выполнить соответствующую замену переменных в интеграле, определяющем обобщенное решение

$$x_1 \ldots x_n \to \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_n.$$

Для первых $(n-1)$ переменной выражения у нас уже есть:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= I_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots \\ \tilde{x}_{n-1} &= I_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

осталось выбрать $\tilde{x}_n$. Из каких соображений выбрать $\tilde{x}_n$? Поскольку поверхности $I_1 = c_1, \ldots, I_{n-1} = c_{n-1}$ пересекаясь, задают линию, понятно, что изменение $\tilde{x}_n$ должно соответствовать движению вдоль этой линии. Поскольку указанная линия является решением системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a^1(x), \\ \dot{x}_2 = a^2(x), \\ \quad \ldots \\ \dot{x}_n = a^n(x), \end{cases} \tag{3.6}$$

в качестве $\tilde{x}_n$ надо взять величину, совпадающую с независимой переменной этой системы.

Единственная проблема, связанная с этим, состоит в том, что «независимая переменная» системы может выбираться по-разному. Система автономная, и поэтому, заменив s на $s+\alpha$, мы снова получим ту же самую систему. Значит, начало отсчета (т. е. $s=0$) мы должны выбрать произвольным образом. Однако и тут есть некоторая, даже очень большая свобода: для каждой траектории начало отсчета можно выбирать по-своему. Правда, если для «соседних» траекторий начало отсчета выбирать не слишком далеко друг от друга, то эти начальные точки образуют более или менее разумное множество — **поверхность**.

Собственно, именно тут мы пришли к подходящему определению $\tilde{x}_n$. Зададим некоторую поверхность S так, чтобы все траектории ее «протыкали», и обозначим через $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ время, необходимое для достижения этой поверхности по траекториям системы (3.6). Тогда в качестве $\tilde{x}_n$ можно выбрать $\tilde{x}_n = \tau(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, мы построили замену переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \ldots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

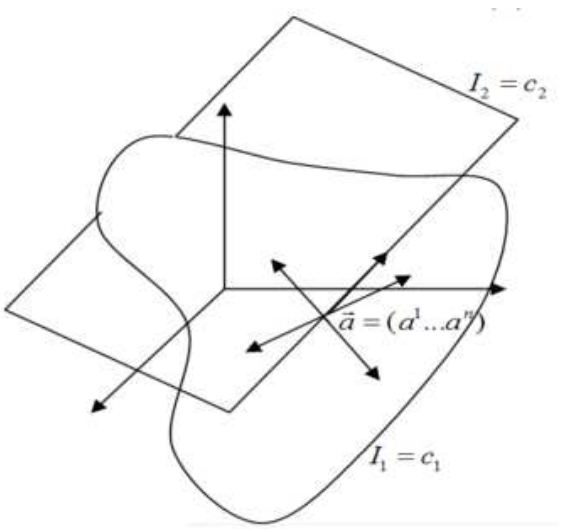
Замена корректна при выполнении следующего условия:

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_n} \cdots \dfrac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_n} \end{array} \right| \neq 0.$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что для любой системы (3.6) найдется набор интегралов $I_1 \dots I_{n-1}$ таких, что матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial I_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial I_1}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial I_{n-1}}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial I_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

имеет ранг $n-1$, т.е. ее строки (градиенты функций $I_i(x)$) линейно независимы.



С другой стороны, по определению первого интеграла, эти градиенты ортогональны вектору $\vec{a}(x)$. Значит для выполнения условия корректности замены достаточно, чтобы градиент $\tilde{x}_n$ был неортогонален вектору $\vec{a}$. Оказывается, что для $\tilde{x}_n = s(x_1, \dots, x_n)$ это обеспечивается как ряд условий «протыкания» начальной поверхности S траекториями, что аналитически записывается в форме $\langle \nabla S, \vec{a} \rangle \neq 0$ (здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение). В этом случае поверхность S называют *нехарактеристической*.

Таким образом, искомая замена переменных найдена, и в новых переменных $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ уравнение имеет вид

$$\tilde{u}_{\tilde{x}_n} = \tilde{b}(\tilde{x})\,\tilde{u} + \tilde{c}(\tilde{x}),$$

для которого определение обобщенного решения имеет вид:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left[\varphi_{x^n} + \tilde{b}(\tilde{x})\,\varphi \right] \tilde{u} + \tilde{c}(\tilde{x})\,\varphi \right) d\tilde{x}_1 \dots d\tilde{x}_n = 0,$$

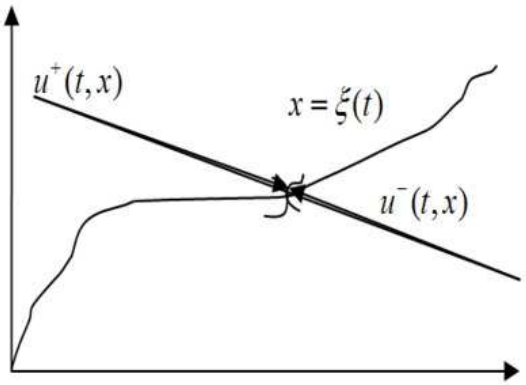
и для которого формула (3.5) оказывается обобщенным решением для любой суммируемой функции $\varphi(I_1, \dots, I_n)$.

Для решения системы (3.6), удовлетворяющей условию $\xi^i(t, x_1, \dots, x_n)$, $\xi^i(0, x_1, \dots, x_n) = x_i$, по определению $\tau(x_1, \dots, x_n)$.

4. Характеристики и разрывы решений уравнений первого порядка

4.1. Характеристики и разрывы решений линейных уравнений

Рассмотрим уравнение $u_t + a(t,x)\,u_x = f(t,x,u)$. И пусть $u(t,x)$ — разрывное решение этого уравнения, которое является классическим вне линии $x = \xi(t)$, на которой происходит разрыв.



Решение выше линии $x = \xi(t)$ (при $x > \xi(t)$) мы обозначаем через $u^+(t,x)$, а решение, лежащее ниже этой линии, через $u^-(t,x)$. На линии эти решения имеют, вообще говоря, различные пределы $u^+(t,\xi(x))$ и $u^-(t,\xi(x))$ соответственно. По определению обобщенного решения

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\left[\varphi_t + (a\varphi)_x \right] u(t,x) + f(t,x,u(t,x))\,\varphi \right) dtdx = 0$$

Фиксируем x, и, проинтегрировав по t по частям произведение $\varphi_t u$, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_t u dt = \int\limits_{-\infty}^{\xi^{-1}(x)} \varphi_t u^+ dt + \int\limits_{\xi^{-1}(x)}^{\infty} \varphi_t u^- dt =$$

$$= \varphi u^+ \Big|_{-\infty}^{\xi^{-1}(x)} - \int\limits_{-\infty}^{\xi^{-1}(x)} \varphi u_t^+ dt + \varphi u^- \Big|_{\xi^{-1}(x)}^{\infty} - \int\limits_{\xi^{-1}(x)}^{\infty} \varphi u_t^- dt =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi u_t dt + \varphi\left(\xi^{-1}(x), x\right) u^+\left(\xi^{-1}(x), x\right) - \varphi\left(\xi^{-1}(x), x\right) u^-\left(\xi^{-1}(x), x\right).$$

Аналогично интегрирование по частям по x (при фиксированном t) произведения $(a\varphi)_x u$ и оно дает

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} a\varphi u_x dx + a\varphi(t,\xi(t)) \left[u^-(t,\xi(t)) - u^+(t,\xi(t)) \right].$$

Значит после интегрирования по частям наше тождество приобретает вид:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi u_t dtdx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\xi^{-1}(x), x\right) \left[u^+\left(\xi^{-1}(x), x\right) - u^-\left(\xi^{-1}(x), x\right) \right] dx -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2} a\varphi u_x dtdx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} a\varphi(t,\xi(t)) \left[u^-(t,\xi(t)) - u^+(t,\xi(t)) \right] dt + \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(t,x,u(t,x))\,\varphi dtdx = 0.$$

Так как сумма выражений, стоящих под знаками первого, третьего и последнего интегралов равна нулю как выше линии $x = \xi(t)$, так и ниже ее (мы предположили, что вне

линии $x = \xi(t)$ функция $u(t,x)$ — классическое решение), у нас остались только второй и четвертый интегралы. После замены во втором интеграле $x = \xi(t)$ их можно объединить в один:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,\xi(t)) \left(\dot{\xi}(t) \left[u^+(t,\xi(t)) - u^-(t,\xi(t)) \right] + a\varphi(t,\xi(t)) \left[u^-(t,\xi(t)) - u^+(t,\xi(t)) \right] \right) dt = 0$$

И в силу произвольности функции $\varphi(t,x)$ получаем

$$\left[u^+(t,\xi(t)) - u^-(t,\xi(t)) \right] \left(\dot{\xi}(t) - a(t,\xi(t)) \right) = 0.$$

Поскольку мы предположили, что на линии $x = \xi(t)$ функция $u(t,x)$ имеет разрыв, квадратная скобка отлична от нуля, и значит

$$\dot{\xi}(t) = a(t,\xi) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{a(t,\xi)} = \frac{dt}{1}.$$

Отсюда следует мораль: *для линейного уравнения в частных производных разрывы могут происходить только по характеристикам.*

4.2. Характеристики и разрывы решений квазилинейных уравнений

Рассмотрим теперь квазилинейное уравнение, которое мы уже изучали:

$$u_t + uu_x = 0.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_t - uu_x)\varphi dtdx = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(u\varphi_t + \frac{u^2}{2}\varphi_x \right) dtdx = 0,$$

для гладких функций $u(t,x)$ равенство $-\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(u\varphi_t + \frac{u^2}{2}\varphi_x \right) dtdx = 0$ эквивалентно исходному уравнению, а для негладких функций определяет обобщенное решение уравнения. Преобразуем его, как и ранее, предположив что $u(t,x)$ является классическим решением выше и ниже линии $x = \xi(t)$. Получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (u_t - uu_x)\varphi dtdx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\xi^{-1}(x), x\right) \left(u^+\left(\xi^{-1}(x), x\right) - u^-\left(\xi^{-1}(x), x\right) \right) dx + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,\xi(t)) \left(\frac{u^{-^2}(t,\xi(t))}{2} - \frac{u^{+^2}(t,\xi(t))}{2} \right) dt = 0.$$

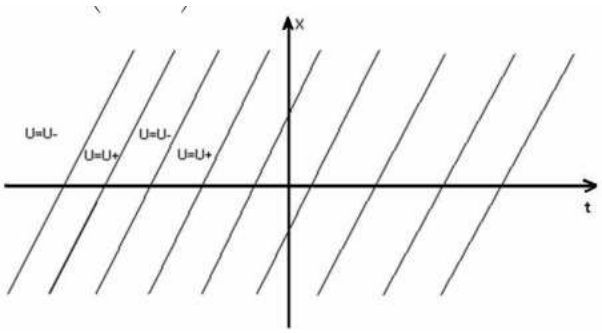
Здесь первое слагаемое равно нулю. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,\xi(t)) \left(\dot{\xi}(t) \left(u^+(t,\xi(t)) - u^-(t,\xi(t)) \right) + \frac{u^{-^2}(t,\xi(t))}{2} - \frac{u^{+^2}(t,\xi(t))}{2} \right) dt = 0,$$

и, в силу произвольности φ,

$$\dot{\xi}\left(u^{+}\left(t,\xi\left(t\right)\right)-u^{-}\left(t,\xi\left(t\right)\right)\right)=\frac{u^{+^{2}}\left(t,\xi\left(t\right)\right)-u^{-^{2}}\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{2}\;\Rightarrow\;\dot{\xi}=\frac{u^{+}\left(t,\xi\left(t\right)\right)-u^{-}\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{2}.$$

Как видно, полученное уравнение никак не связано с уравнением характеристик. Чтобы увидеть, что обозначает полученное равенство, рассмотрим пример кусочно-постоянной функции $u=u^{+}$ при $x>\xi\left(t\right)$, и $u=u^{-}$ при $x<\xi\left(t\right)$. Тогда $\dot{\xi}=\dfrac{u^{+}+u^{-}}{2}$, и уравнение линии разрыва имеет вид $x=\left(\dfrac{u^{+}+u^{-}}{w}\right)t+c$.



Дальше идет, u^{-} потом u^{+} и так далее, заполняя всю плоскость. Как мы видим, возможностей конструировать обобщенные решения на самом деле невероятно много, и поскольку для безумия нет предела, необходимо дополнительными соображениями как-то организовать, что считать решением, а что нет. В настоящее время такие ограничения получаются из тех или иных физических соображений, математических же способов ограничить разумным образом класс решений квазилинейных уравнений, пока нет. Аналогично проведением рассуждений можно показать, то для еравнения вида

$$u_{t}+\frac{\partial a\left(t,x,u\right)}{\partial x}=0,$$

уравнение линии разрыва имеет вид

$$\dot{\xi}=\frac{a\left(t,\xi,u^{+}\left(t,\xi\left(t\right)\right)\right)+a\left(t,\xi,u^{-}\left(t,\xi\left(t\right)\right)\right)}{u^{+}\left(t,\xi\left(t\right)\right)+u^{-}\left(t,\xi\left(t\right)\right)}$$

5. Простейшие уравнения второго порядка

Уравнения вида $u_{xx}=0$ для функций $u(x,y)$ (аналогично для $u_{yy}=0$). Данные уравнения имеют решение, которое ищется так: сначала интегрируем по x один раз, и получим $u_x = C_1(y)$, затем еще раз и получим $u(x,y) = C_1(y)\,x + C_2(y)$.

Уравнения вида $u_{xy}=0$. Здесь интегрирование по y дает $u_x = C(x)$, а затем интегрировани по x приводит к $u(x,y) = C_1(x) + C_2(y)$.

Уравнения вида $u_{xx}-u_{yy}=0$. Это уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0,$$

где в скобках стоит некоторый дифференциальный оператор. Этот оператор напоминает разность квадратов. Попытка формально разложить его на множители дает

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0.$$

Это формальное разложение подсказывает путь решения. Если

$$v(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u = u_x + u_y,$$

то

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) v = v_x - v_y = u_{xx} - u_{yy},$$

так что наше уравнение распадается на два:

$$\begin{aligned} v &= u_x + u_y, \\ v_x - v_y &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя второе, получаем $v = u_x + u_y = C_1(x+y)$, и тогда $u = C_1(x+y) + C_2(x-y)$. Отметим, что не все уравнения раскладываются на множители. Среди уравнений данного класса есть уравнение вида: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0$, называемое **уравнением Лапласа**. Это уравнение не раскладывается на множители. Правда, можно формально представить

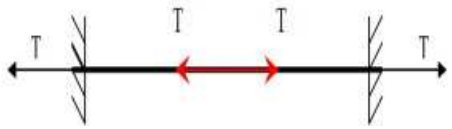
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

но это будет переход к функциям комплексного аргумента.

6. Одномерное волновое уравнение

6.1. Уравнение струны

‖ **Струной** называют упругую нить, натянутую и закрепленную за два конца.



Натягивание струны означает, что на каждую его точку действует две силы, равные по величине (обозначим ее за T), но противоположные по направлению, называемые **силами натяжения**. Эти силы уравновешивают друг друга, и в результате струна находится в покое.

Приложим теперь к струне силу величины F в точке x (см. рис 5). Струна примет треугольную форму. Теперь силы натяжения не уравновешивают друг друга, их равнодействующая противостоит внешнему воздействию F. Запишем теперь условие равновесия (для вертикальных проекций сил) $-T\sin\alpha - T\sin\beta + F = 0$. Если форму струны слева обозначить через $y_-(x)$, а справа через $y_+(x)$, то учитывая, что $tg\beta = y'_-$, $tg\alpha = y'_+$, получаем:

$$T\left(\frac{y'_+}{\sqrt{1+\left(y'_+\right)^2}} - \frac{y'_-}{\sqrt{1+\left(y'_-\right)^2}}\right) + F = 0.$$

Рассмотрим теперь случай распределенной нагрузки.

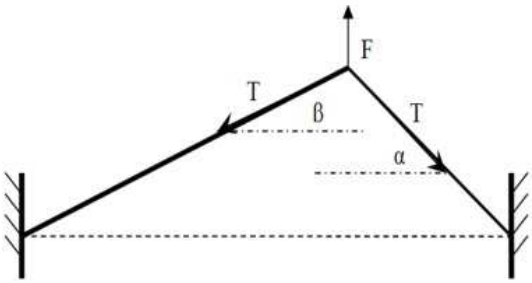


Рис. 5:

В принципе этот случай совершенно аналогичен предыдущему: если взять промежуток $[x, x+\Delta x]$, то условие равновесия силы натяжения приложенной к левому концу этого промежутка, силы натяжения приложенная к правому концу и внешняя сила F имеет вид:

$$T\left(\frac{y'(x+\Delta x)}{\sqrt{1+\left(y'(x+\Delta x)\right)^2}} - \frac{y'(x)}{\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}}\right) + F_{[x,x+\Delta x]} = 0.$$

Деля на Δx, и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$T\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)' + f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — линейная плотность силы. Обычно, когда имеют дело с реальной струной, считают деформации малыми, соответственно $\sqrt{1+y'^2}$ заменяют на 1, и получают **линейное уравнение струны** $-y'' = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

Если теперь струна находится не в равновесии, а в движении, то сумма сил не равна нулю, а производит ускорение в соответствии со вторым законом Ньютона. Чтобы записать этот закон, нам понадобится вместо функции $y(x)$ рассмотреть функцию двух переменных $u(t,x)$ (при каждом t это формула струны в момент времени t), тогда сила действующая на точку x в момент t равна

$$T\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_x + f(t,x),$$

а ускорение равно u_{tt}, так что мы получаем в соответствии со вторым законом Ньютона, уравнение

$$\rho(x)\,u_{tt} = T\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)_x + f(t,x),$$

называемое **нелинейным уравнением струны**. Здесь $\rho(x)$ — линейная плотность струны (т. е. предел отношения массы отрезка $[x, x+\Delta x]$ к длине этого отрезка). В случае малых колебаний это уравнение линеаризуют, получая

$$\rho(x)\,u_{tt} = Tu_{xx} + f(t,x).$$

Если $\rho(x) \equiv const$, то струну называют **однородной**, а в противном случае — **неоднородной**. Для однородной струны уравнение обычно делят на ρ, приводя его к виду

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x).$$

Это уравнение мы и будем изучать далее как уравнение колебаний струны. Если $f(t,x) = 0$, то колебания называют **свободными**, а в противном случае — **вынужденными**.

Уравнение свободных колебаний мы решать умеем:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$
$$u = f(x-at) + g(x+at).$$

Посмотрим, что представляет собой функция $u = f(x-at)$. При $t=0$ она совпадает с $f(x)$. При $t=1$ это та же картинка, только сдвинутая на a вправо.

Теорема 6..1 *Общее классическое решение уравнения*

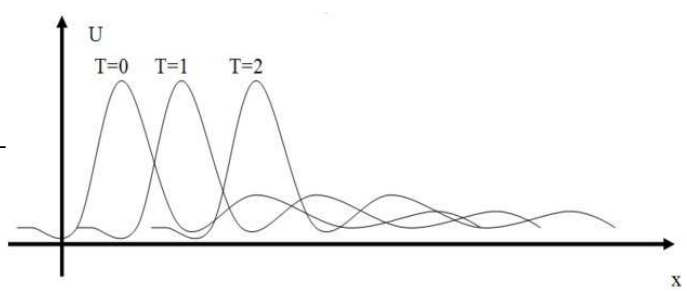
$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

называемое ***волновым уравнением****, имеет вид*

$$u = f(x-at) + g(x+at),$$

где f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции. Это решение называют ***формулой бегущей волны****.*

Поскольку уравнение струны — это второй закон Ньютона, т. е. уравнение динамики, и поскольку мы привыкли, что динамика конкретного движения определяется начальными условиями (положением и скоростью) элементов механической системы, естественно и для уравнения струны потребовать эти значения: $u\,|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t\,|_{t=0} = \psi(x)$.



Теорема 6..2 *Решение задачи Коши для уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с начальными условиями

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$u_t\,|_{t=0} = \psi(x),$$

где φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, ψ — один раз непрерывно дифференцируемая функция, имеет вид:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds,$$

которое получило названия ***решение Д'Аламбера****.*

Доказательство. Подставляя условия в формулу бегущей волны, получаем

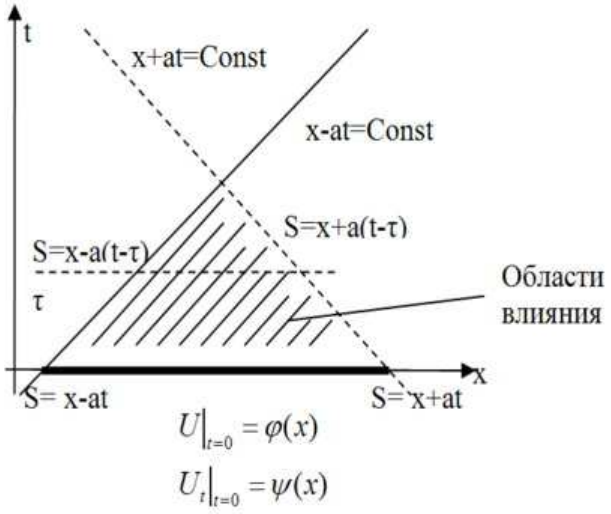
$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x), \end{cases}$$

из которой определяется

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(s)\,ds + C,$$

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(s)\,ds - C.$$

В итоге получаем искомую формулу для решения волнового уравнения. ■



Полученная формула имеет красивую геометрическую интерпретацию. Если $\psi(x) = 0$ (т. е. струна в начальный момент выведена из равновесия, но покоится), то при $t > 0$ ее начальная форма $\varphi(x)$ как бы делится пополам: половина идет направо, половина — налево.

Еще одна картинка оказывается полезной при изучении волнового уравнения: если на плоскости (t,x) отметить некоторую точку и провести через нее прямые $x - at = const$, и $x + at = const$, то эти прямые пересекут ось абсцисс в точках $S_1 = x - at$ и $S_2 = x + at$, т. е. в тех точках, в которых вычисляются значения начального положения $\varphi(s)$ и которые ограничивают промежуток интегрирования начальной скорости $\psi(s)$. Из формулы следует, что значения $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ при s, лежащих вне промежутка $(x-at, x+at)$ не оказывают

никакого влияния на значение решения в точке (t,x). По этой причине область между прямыми

$$\begin{cases} x-at=const, \\ x+at=const, \end{cases}$$

проведенными через (t,x) называется **областью влияния**.

6.2. Принцип Дюамеля

Перейдем теперь к изучению неоднородного уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}+f\left(t,x\right)$.

Для того, чтобы получить формулу решения, воспользуемся идеями, тесно связанными с законами динамики. В динамике различают два типа воздействий: постоянно действующая сила и удар. При постоянно действующей силе тело меняет свою траекторию движения постепенно. При ударе траектория меняется мгновенно. Связь между постоянной силой и ударом состоит в интерпретировании удара как постоянной силы, очень большой по величине, но действующей очень малый промежуток времени. С другой стороны, постоянная сила интерпретируется как последовательность частых слабых ударов.

Что дает нам такая интерпретация? Рассмотрим покоящуюся струну и ударим по ней. Что произойдет? Конечно, струна мгновенно свою форму не изменит, ее положение останется прежним. Но струна приобретет начальную скорость, и именно поэтому начнет двигаться.

Если удар совершен при $t=0$, то формула решения будет иметь вид

$$u\left(t,x\right)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi\left(s\right)ds.$$

Если в момент времени $t=\tau$, то

$$u\left(t,x\right)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\psi\left(s\right)ds.$$

Собственно **принцип Дюамеля** состоит в том, что формулу решения неоднородного уравнения можно получить интегрированием по $[0,t]$ формулы для решения однородного уравнения с начальной скоростью $\psi_\tau\left(s\right)$ при $t=\tau$ с заменой $\psi_\tau\left(s\right)$ на $f\left(\tau,s\right)$ (т. е. последовательности ударов на постоянно действующую силу). Это дает формулу:

$$u\left(t,x\right)=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f\left(\tau,s\right)dsd\tau.$$

Теорема 6..3 *Решение уравнения*

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x,)$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям, определяется формулой

$$u\left(t,x\right)=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f\left(\tau,s\right)dsd\tau.$$

Решение является классическим, если функция f — непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Сама по себе формула ничего не доказывает. Для того, чтобы убедиться в ее справедливости надо по-честному продифференцировать:

$$u_t = \frac{1}{2a}\int\limits_x^x f(t,s)\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(f(\tau, x + a(t-\tau)) + f(\tau, x - a(t-\tau))\right) d\tau,$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2}\left(f(t,x) + f(t,x)\right) + \frac{a}{2}\int\limits_0^t \left(f_x(\tau, x + a(t-\tau)) - f_x(\tau, x - a(t-\tau))\right) d\tau,$$

$$u_x = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(f(\tau, x + a(t-\tau)) - f(\tau, x - a(t-\tau))\right) d\tau,$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(f_x(\tau, x + a(t-\tau)) - f_x(\tau, x - a(t-\tau))\right) d\tau.$$

Как мы видим, действительно $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x)$, так что наша формула дает решение неоднородного уравнения. ■

6.3. Отражение волн

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

До сих пор мы его рассматривали при всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Однако для настоящей струны это не вполне правильно, т. к. она всегда конечна, и занимает не всю прямую, а только отрезок длины l ($x \in [0,l]$). На концах отрезка мы имеем условия закрепления $u(t,0) = u(t,l) = 0$. Как они влияют на решение? Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим промежуточную ситуацию, когда уравнение задано на полуоси $x \in [0,\infty)$, а при $x = 0$ задано условие $u(t,0) = 0$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\big|_{t=0} &= \psi(x), \\ u\big|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$u(t,x) = f(x - at) + g(x + at).$$

И подстановка его в начальные условия дает систему уравнений

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x), \end{cases}$$

из которой следует

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(s)\,ds,$$

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(s)\,ds,$$

для $x \geqslant 0$. Главное отличие от случая задачи на всей оси состоит в том, что и уравнения, и их решения определены только лишь при $x > 0$. В то же время ясно, что для формулы $f(x - at)$ аргумент может при $t > 0$ принимать как положительные, так и отрицательные значения, а в формуле $g(x + at)$ это может быть только при $t < 0$. Значит, функции $f(s)$ и $g(s)$ должны быть определены при всех значениях аргумента. Откуда взять значения аргумента при $s < 0$? Оказывается, именно тут играют роль краевые условия. Подстановка в эти условия функции дает равенство

$$f(-at) + g(at) = 0,$$

и если мы делаем замену $s = at$, то получим

$$f(-s) + g(s) = 0,$$

т. е. $g(s)$ при отрицательных значениях s выражается через значения f при положительных значениях аргумента. Наоборот, если сделать замену $s = -at$, то получим: т.е. $f(s)$ при отрицательных значениях s выражается через значения g при положительных значениях аргумента:

$$f(x) = -\frac{\varphi(-x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x -\psi(-s)\,ds,$$

$$g(x) = -\frac{\varphi(-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x -\psi(-s)\,ds.$$

Не трудно заметить, что полученные выражения почти не отличаются от формул при $x \geq 0$. Это дает возможность доказать следующую теорему.

Теорема 6..4 *Решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad x > 0 \\ |_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi(x), \\ u\,|_{x=0} &= 0, \end{aligned}$$

задается формулой Д'Аламбера, в которой начальные условия продолжены на отрицательную полуось нечетным образом:

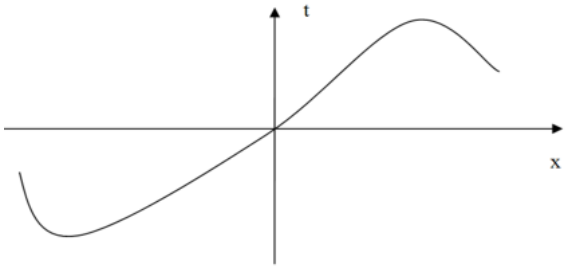
$$u(t,x) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(s)\,ds,$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), x \geqslant 0, \\ -\psi(-x), x \leqslant 0, \end{cases}$$

Решение является классическим, если функция φ — дважды, а ψ — один раз непрерывно дифференцируема, и выполнены условия $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = 0$.



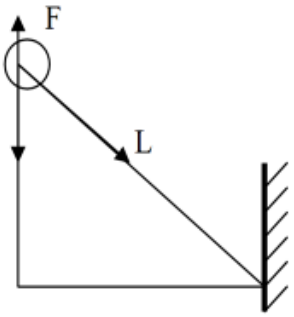
Доказательство. В заданной обозначении

$$f(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)\,ds,$$

$$g(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^x \tilde{\psi}(s)\,ds,$$

уже при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. И в итоге мы получаем искомую формулу. ■

6.4. Условие свободного конца



Струна может быть закреплена не только жестко, но и мягко, свободно. Физически это выглядит так: струна привязывается к кольцу, которое надевается на спицу, так что этот конец струны может скользить по спице вверх–вниз. Какое условие описывает такой тип закрепления? Для того чтоб понять это вспомним вывод уравнения струны. Основное уравнение — уравнение баланса сил натяжения и внешней силы. В случае свободного закрепления мы имеем совершенно аналогичную ситуацию, только сила натяжения у нас тут одна. Таким образом, уравнение равновесия имеет вид:

$$Tu_{xx} + F = 0.$$

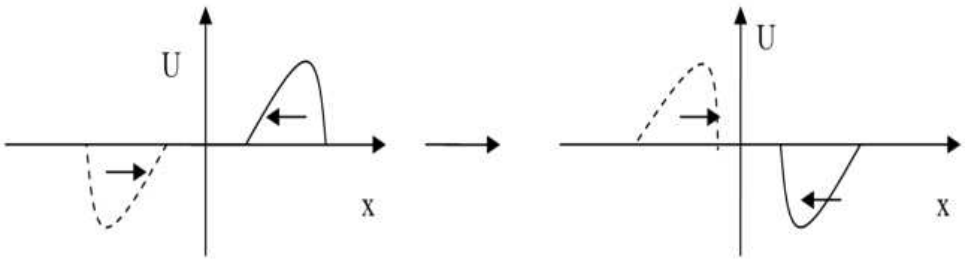
В случае, когда внешней силы нет, мы получаем условие, которое обычно и называют условием свободного конца: $u_x\big|_{x=0} = 0$. Это дает формулу

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds, & x > at, \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{0} \psi(-s)\,ds + \dfrac{1}{2a}\int_0^{at+x} \psi(s)\,ds, & 0 < x < at. \end{cases}$$

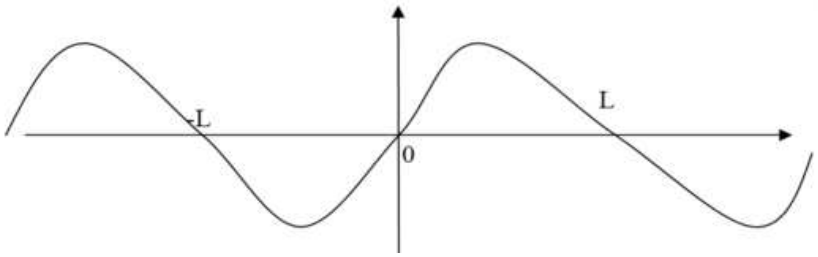
Условие продолжения начальных условий на $x < 0$ позволяет объяснить явление, хорошо известное в физике: *отражение волн от закрепленного или свободного конца.* Оно

состоит в том, что волна, идущая по струне в сторону конца, через некоторое время достигает его и возвращается назад, но только «вверх тормашками» и «задом наперед».

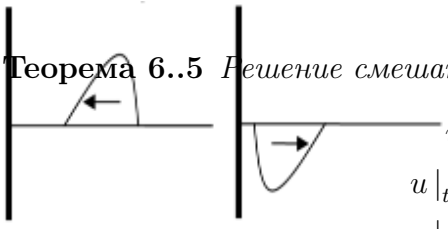
Принцип продолжения начальных условий позволяет увидеть это явление как эффект обмена волнами области реальной ($x > 0$) и воображаемой ($x < 0$). В случае, когда мы



рассматривали уравнение на отрезке $[0, l]$ (с условиями закрепления $u(t, 0) = u(t, l) = 0$), можно точно также использовать формулу Д'Аламбера. На отрезок $[-l, 0]$ надо продолжить начальные условия нечетным образом. Но что будет за точкой l? Оказывается точно также — ведь точка $x = l$ ничем не хуже точки $x = 0$. Такое продолжение нечетное не только относительно $x = 0$, но и относительно $x = l$ (что формально записывается формулой $\varphi(2l - x) = -\varphi(x)$), оказывается $2l$–периодическим.



6.5. Условия согласования



Теорема 6..5 *Решение смешанной Коши*

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, l], \\
u\,|_{t=0} &= \varphi(x) \in C^2((0, l)), \\
u_t\,|_{t=0} &= \psi(x) \in C^1((0, l)), \\
u\,|_{x=0} &= \nu(t) \in C^2([0, \infty)), \\
u\,|_{x=l} &= \mu(t) \in C^2([0, \infty)).
\end{aligned}
$$

задается формулой Д'Аламбера:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\, ds,$$

и является классическим, если выполнены условия согласования

$$
\begin{cases} \nu(0) = \varphi(0), \\ \nu'(0) = \psi(0), \\ \nu''(0) = a^2 \varphi''(0). \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \mu(0) = \varphi(l), \\ \mu'(0) = \psi(l), \\ \mu''(0) = a^2 \varphi''(l). \end{cases}
$$

Доказательство. Мы рассматриваем случай, в котором ненулевыми являются не только начальные, но и граничные условия. И потому такие задачи называют *смешанными*. До сих пор мы не обсуждали вопрос, нужны ли какие-то ограничения на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$? Оказывается, что такие ограничения есть, и они имеют вполне естественный характер, так с одной стороны $u(0,0)=\nu(0)$, а с другой $\varphi(0)=u(0,0)$, значит $\nu(0)=\varphi(0)$, иначе получается абсурд (если $u(t,x)$ — непрерывна). Для того, чтобы выписать все условия, необходимо систематически перечислить все выражения производных от начальных и граничных условий через производные решения:

$$\begin{cases} \varphi(0)=u(0,0), \\ \varphi'(0)=u_x(0,0), \\ \varphi''(0)=u_{xx}(0,0), \end{cases} \quad \begin{cases} \psi(0)=u_t(0,0), \\ \psi'(0)=u_{tt}(0,0), \end{cases} \quad \begin{cases} \nu(0)=u(0,0), \\ \nu'(0)=u_t(0,0), \\ \nu''(0)=u_{tt}(0,0). \end{cases}$$

Это дает нам три условия:

$$\begin{cases} \nu(0)=\varphi(0), \\ \nu'(0)=\psi(0), \\ \nu''(0)=a^2\varphi''(0). \end{cases}$$

(последнее в силу уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$). Аналогично на правом конце получаем условие согласованности.

$$\begin{cases} \mu(0)=\varphi(l), \\ \mu'(0)=\psi(l), \\ \mu''(0)=a^2\varphi''(l). \end{cases}$$

■

Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2u_{xx}, \quad x \geqslant 0, \\ u\,|_{t=0} &= 0, \\ u_t\,|_{t=0} &= 1, \\ u\,|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

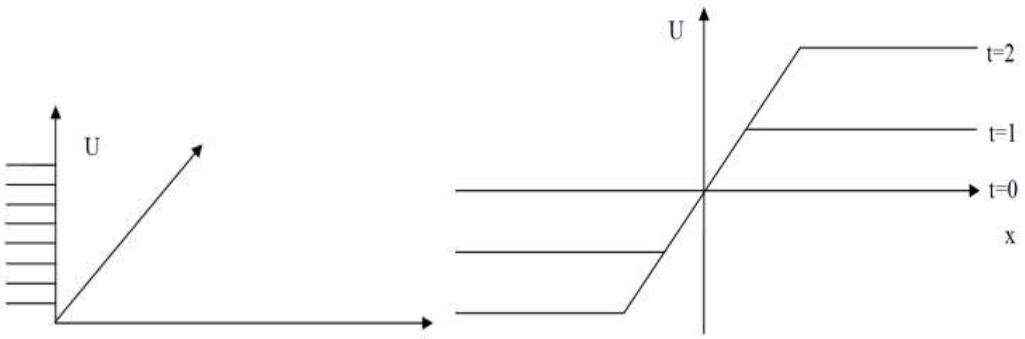
Легко видеть, что для $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не выполняется условие $\nu'(0)=\psi(0)$. Несмотря на то, что условия согласования не выполнены, мы можем формально рассмотреть функцию, определяемую формулой Д'Аламбера.

$$u(t,x)=\frac{\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(s)\,ds.$$

Что дает решение

$$u(t,x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a}(x+at-x+at)=t, & x>at, \\ \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{0}(-a)\,ds+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}(-1)\,ds=\frac{x}{a}, & -at<x<at, \\ \dfrac{1}{2a}(x-at-x-at)=-t, & x<-at. \end{cases}$$

Эта функция, несмотря на то, что не является гладкой, на самом деле также должна рас-



сматриваться как решение поскольку возникает в целом ряде классических задач (например в геофизике). С точки зрения математической эти решения считаются *обобщенными*. Как видно мы снова возвращаемся к проблеме обобщения понятия решения, пригодного для негладких и даже разрывных функций.

7. Многомерное волновое уравнение

7.1. Формула Грина, формула Гаусса Остроградского

Напишем одну из основных формул анализа. Пусть $F(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, тогда:

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\xi^-(y)}^{\xi^+(y)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(F\left(\xi^+(y), y\right) - F\left(\xi^-(y), y\right)\right) dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} F\left(\xi^+(y), y\right) dy + \int\limits_{\beta}^{\alpha} F\left(\xi^-(y), y\right) dy = \oint\limits_{\partial\Omega} F(x,y)\, y'(l)\, dl.$$

Аналогично для любой функции $G(x,y)$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} G(x,y)\left(-x'(l)\right) dl,$$

складывая эти две формулы, мы получим **формулу Грина**:

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega} \left[F(x,y)\, y' - G(x,y)\, x' \right] dl.$$

Выражение в квадратных скобках можно интерпретировать как произведение векторов (F,G) и $(y',-x')$. Каков смысл вектора $(y',-x')$? Как известно, при движении точки (x,y) по кривой, ее вектор скорости (x',y') является касательным к кривой. Поскольку $\langle (x',y'), (y',-x') \rangle = 0$, $(y',-x')$ — это вектор, перпендикулярный вектору скорости. Длина этого вектора равна длине вектора скорости, поэтому можно записать, что

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \left(Fy' - Gx'\right) dt = \oint\limits_{\partial\Omega} \langle (F,G), |\vec{n}\rangle\, dl,$$

где $l = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ — длина кривой, $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ — дифференциал этой кривой, $\vec{n} = \dfrac{(y',-x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ — вектор нормали в кривой. Аналогичным образом в многомерном случае, когда у нас есть векторное поле $F = (F_1, \ldots, F_n)$ в векторном пространстве $x = (x_1, \ldots, x_n)$, имеет место **формула Остроградского–Гаусса**:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV, \quad \vec{F} = (F_1, \ldots, F_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \left\langle \nabla, \vec{F} \right\rangle = \operatorname{div} \vec{F}$$

называется **дивергенцией векторного поля** $\vec{F}$.

Рассмотрим движущуюся жидкость, и пусть $\vec{v}(x,y,z)$ — скорость жидкости в точке (x,y,z). Вырежем мысленно область Ω и посмотрим сколько жидкости протечет через

границу Ω за время Δt. Если скорость направлена перпендикулярно границе, то за время Δt через площадку dS вытечет $|\vec{v}|\,\Delta t dS$ (как паста из тюбика). Если скорость направлена по касательной, то не вытечет ничего (жидкость течет вдоль dS), а если наискосок, то вытечет $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\Delta t dS$, т. е. учитывается только нормальная составляющая скорости. Если рассмотреть теперь всю поверхность, то за время Δt вытекает $\int\limits_{\partial\Omega} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \,\Delta t dS$, а скорость вытекания равна соответственно $\int\limits_{\partial\Omega} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, dS$, она и называется **потоком**. По аналогии с этой физической ситуацией для любого векторного поля $\vec{F}$ величина $\int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS$ называется **потоком этого векторного поля через поверхность** $\partial\Omega$.

7.2. Уравнение мембраны

Рассмотрим мембрану некоторой формы, растянутую и закрепленную по краю. В равновесии в каждой точке x и в каждом направлении $\vec{n}$ действует сила $\vec{T}\,(x, \vec{n})$ натяжения мембраны. Сумма воздействий по всем направлениям равна нулю. Если приложить к мембране внешнюю силу с поверхностной плотностью $f\,(x)$, то она примет изогнутую форму. Силы натяжения уже не будут уравнивать друг друга, а будут компенсировать внешнее воздействие. Для того, чтобы написать условие баланса, необходимо выделить мысленно некоторый фрагмент мембраны (обозначим его через Ω), вычислить внешнюю силу, которая приложена к этому фрагменту — она равна $\int\limits_{\Omega} f dS$, и вертикальную проекцию силы натяжения, действующей на границу этого фрагмента. Эта сила вычисляется, как и в случае струны, через производную (т.е. градиент $\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x^n} \right)$) функции $u\,(x)$, и равна

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\left\langle \vec{T}\,(x, \vec{n})\,, \operatorname{grad} u \right\rangle}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} dl.$$

Таким образом, условие равновесия приобретает вид:

$$\int\limits_{\Omega} f dS + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\left\langle \vec{T}\,(x, \vec{n})\,, \operatorname{grad} u \right\rangle}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} dl = 0.$$

В простейших случаях $\vec{T}\,(x, \vec{n}) = T\vec{n}$, предполагается, что $\operatorname{grad} u$ мал, поэтому интеграл заменяется на

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\left\langle \vec{T}\,(x, \vec{n})\,, \operatorname{grad} u \right\rangle}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} u|^2}} dl \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\partial\Omega} T \,\langle \operatorname{grad} u, \vec{n} \rangle \, dl,$$

что дает уравнение

$$\int\limits_{\Omega} f dS + \int\limits_{\partial\Omega} T \,\langle \operatorname{grad} u, \vec{n} \rangle \, dl = 0.$$

Поскольку в силу формулы Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_{\partial\Omega} T\left\langle \operatorname{grad} u, \vec{n}\right\rangle dl = \int_{\Omega} T\Delta u dS$$

мы получаем

$$\int\limits_{\Omega} \left(T\Delta u + f\right) dS = 0.$$

Поскольку область Ω выбиралась произвольно, отсюда следует, что

$$T\Delta u + f = 0.$$

Это — **уравнение равновесия мембраны**, означающее равенство нулю в каждой точке приложенных к ней сил. Если сумма сил не равна нулю, то мы должны написать динамическое уравнение – **второй закон Ньютона** — линеаризованное уравнение мембраны в простейшем случае:

$$\rho\left(x\right) u_{tt} = T\Delta u + f\left(t, x\right).$$

В более общей ситуации $\vec{T}\left(x, \vec{n}\right)$ является линейной функцией от $\vec{n}$: $\vec{T}\left(x, \vec{n}\right) = A\left(x\right)\vec{n}$, где A — некоторая матрица $A = \left(a^{ij}\right)$, и тогда уравнение мембраны будет иметь более сложный вид:

$$\rho\left(x\right) u_{tt} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{a^{ij}\left(x\right) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \sum\limits_i \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}} \right) + f\left(t, x\right).$$

7.3. Уравнение электростатического поля (гравитационного поля)

В основе теории электростатического и гравитационного взаимодействия лежит *закон обратных квадратов*: два объекта притягиваются или отталкиваются с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = \frac{k}{r^2}.$$

В гравитации k зависит от масс тел, в электростатике — от зарядов.

Этот закон для гравитационных воздействий был обоснован Ньютоном на основании законов Кеплера движения планет, которые рассматриваются как экспериментальный факт, поскольку были сформулированы Кеплером на основе результатов многолетних наблюдений его учителя, астронома Браге.

Для электрических взаимодействий закон обратных квадратов основан также на экспериментальных наблюдениях, одним из наиболее убедительных обоснований является описанный Максвеллом в «Трактате об электричестве и магнетизме» эффект полного перетекания заряда: если заряженное тело внести внутрь металлической сферы и прикоснуться к ней, то заряд перейдет на сферу полностью, без остатка. Максвелл уже математическими средствами, доказывает, что для всякого закона взаимодействия, кроме закона обратных квадратов это невозможно.

Обычно законы электрического и гравитационного взаимодействия описывают с помощью ряда объектов уже математического характера, получаемых в ряде тех или иных абстракций.

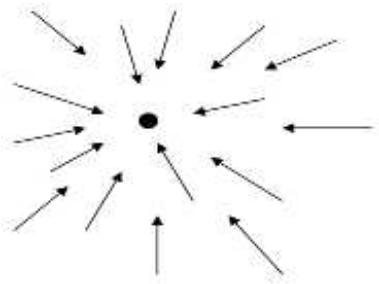


Рис. 6: Иллюстрация векторного поля.

Первая из абстракций — это *векторное поле*. Фиксируя одно из взаимодействующих тел (объектов), мы начинаем перемещать другое из одной точки пространства в другую, измеряя величину и направление действующей силы. Если теперь к каждой точке пространства «приложить» соответствующий вектор, то мы получим векторное поле $\vec{F}(x,y,z)$, которое характеризует уже только первый из взаимодействующих объектов.

Вторая абстракция — это *потенциал*. Он возникает, когда $\vec{F}(x,y,z)$ оказывается градиентом некоторой функции $U(x,y,z)$:

$$\vec{F}(x,y,z) = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Для

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{k}{|\vec{r}|^2}$$

(первый множитель просто указывает направление)

$$U(\vec{r}) = -\frac{k}{|\vec{r}|}.$$

Третья абстракция состоит в том, что мы представляем произвольное поле сил в виде суммы сил точечных зарядов. Это называется *принципом суперпозиции*: если зарядов несколько, то их воздействия складываются, а если заряд распределен по области пространства, то их воздействие интегрируется:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad U = \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\vec{p})(\vec{p}-\vec{r})}{|\vec{p}-\vec{r}|^3} dp, U(\vec{r}) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\vec{p})}{|\vec{p}-\vec{r}|} dp, \tag{7.1}$$

где ρ — плотность заряда.

Наиболее важным в теории гравитационного и электрического поля оказывает *принцип обратной интерпретации*, связанный со следующим эффектом: если посмотреть на картинку (6), то можно нарисованные на ней стрелочки ассоциировать со скоростями некой движущейся среды. Если посчитать поток соответствующего векторного поля через сферу радиуса R, то окажется что

$$\int\limits_{S_R} \left\langle \vec{F}, \overleftarrow{n} \right\rangle dS = -\int\limits_{S_R} \left|\vec{F}\right| dS = -\frac{k}{R^2} \int\limits_{S_R} dS = -\frac{k}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi k,$$

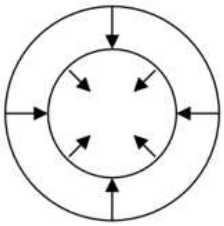
т. е. не зависит от радиуса сферы.

Получается, что для любого сферического слоя через его «внутреннюю» границу вытекает ровно столько, сколько втекает через границу «внешнюю», так что если ассоциировать векторное поле с движущейся средой, то вне центра сферы эта среда никуда не исчезает, и ниоткуда не появляется. А в центре сферы образуется как бы «сток».

Принцип обратной интерпретации состоит в том, что заряд (или массу) можно интерпретировать как величину «стока» в данной точке. А математически суммарный сток в некоторой области выражается как величина потока через границу этой области векторного поля сил (с коэффициентом 4π).

$$4\pi \int\limits_{\Omega} \rho dV = \int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS.$$

Поскольку по формуле Гаусса—Остроградского



$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dS = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

мы получаем, что для любой области Ω

$$\int\limits_{\Omega} \left(4\pi\rho - \operatorname{div} \vec{F}\right) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = 4\pi\rho.$$

Для потенциального поля сил $\vec{F} = \nabla U$ получаем уравнение

$$\Delta U = 4\pi\rho\left(x, y, z\right). \tag{7.2}$$

Таким образом, с одной стороны, U связано с ρ соотношением (7.1), а с другой соотношением (7.2). Фундаментальным фактом математической физики является то, что эти соотношения эквивалентны математическим: первая формула есть просто формула решения уравнения (7.2).

Нас же будут интересовать динамические уравнения, которые получаются из (7.2), выражающем закон равновесия, добавлением соответствующих динамических членов. Если речь идет о динамике «механической», описываемой вторым законом Ньютона, то мы получаем уравнение, описывающее сплошную среду:

$$m\left(x\right) U_{tt} = \Delta U - 4\pi\rho\left(x, y, z, t\right).$$

Если речь идет о динамике тепловой, описываемой законом Фурье $Q\left(x\right) = c\left(x\right) \dfrac{dU}{dt}$, (где U — температура, Q — тепловой поток), то мы получаем уравнение

$$c\left(x\right) U_t = \Delta U - 4\pi\rho\left(t, x, y, z\right).$$

Уравнения электростатической динамики чуть сложнее, мы их касаться не будем.

7.4. Многомерное волновое уравнение

Рассмотрим теперь простейшее уравнение

$$u_{tt} = \Delta u = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}.$$

По аналогии с уравнениями первого порядка и с уравнением $u_{tt} = u_{xx}$ можно было бы получить, что общее решение будет иметь вид произвольной функции от нескольких функциональных (играющих роль первых интегралов). Оказывается, однако, что это не так: подстановка в уравнение $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ функции вида $u(t, x, y) = F(I, J)$, где F — произвольная функция, дает равенство:

$$F_{II}\left(I_t^2 - I_x^2 - I_y^2\right) + 2F_{IJ}\left(I_t J_t - I_x J_x - I_y J_y\right) + F_{JJ}\left(J_t^2 - J_x^2 - J_y^2\right) + \\ + F_I\left(I_{tt} - I_{xx} - I_{yy}\right) + F_J\left(J_{tt} - J_{xx} - J_{yy}\right) = 0.$$

Чтобы F была произвольной, нужно чтобы каждая из скобок равнялась нулю.

$$\begin{aligned} I_t^2 &= I_x^2 + I_y^2, \\ J_t^2 &= J_x^2 + J_y^2, \\ I_t J_t &= I_x J_x + I_y J_y, \\ I_{tt} &= I_{xx} + I_{yy}, \\ J_{tt} &= J_{xx} + J_{yy}. \end{aligned}$$

Не трудно проверить, что из этих равенств следует, что (I_t, I_x, I_y) пропорционально (J_t, J_x, J_y), а значит $I = F(J)$, т.е. наши «интегралы» не являются различными.

Рассмотрим двумерное волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}.$$

Какие могут быть решения у этого уравнения? Прежде всего, решение может не зависеть от y, и тогда уравнение сводится к одномерному и имеет решение вида

$$u = f(x \pm t).$$

Аналогично решения, не зависящие от x имеют вид

$$u = f(y \pm t).$$

Эти решения называют **плоскими волнами** (по аналогии с волнами на поверхности моря).

Это не единственные решения, ассоциирующиеся с волновыми процессами. Если перейти к новым координатам:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ \tilde{y} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{cases}$$

то уравнение, как оказывается, не меняется:

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}.$$

Тогда решением будет функция

$$u = f(\tilde{x} - t) = f(x\cos\varphi + y\sin\varphi - t),$$

что более коротко записывается в виде

$$u = f(t - \langle n, \tilde{x}\rangle),$$

где $n = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ — вектор, указывающий *направление распространения* плоской волны.

Аналогично для многомерного уравнения

$$u_{tt} = \Delta u.$$

Решения, где $x \in \mathbb{R}^n$ типа плоских волн имеют вид

$$u = F\left(t - \langle\theta, x\rangle\right),$$

где θ — единичный вектор (точка единичной сферы). Примечательно, что общее решение уравнения может быть представлено в виде

$$u = \int\limits_{\theta \in S_n} F\left(t - \langle\theta, x\rangle\right) dS,$$

т. е. в виде сумм плоских волн. По этой причине уравнение $u_{tt} = \Delta u$ обычно называется **многомерным волновым уравнением**.

Еще один тип решения волнового характера уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ ассоциируется с волнами, идущими от брошенного в воду камня. Это решения радиального типа

$$u = u\left(t, r\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в двухмерном случае, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в трехмерном случае. Вычисление производных дает:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x = \frac{1}{r} u_r x, \\
u_y &= u_r r_y = \frac{1}{r} u_r y, \\
u_{xx} &= \left(\frac{1}{r} u_r\right)_r \frac{x^2}{r} + \frac{1}{r} u_r, \\
u_{yy} &= \left(\frac{1}{r} u_r\right)_r \frac{y^2}{r} + \frac{1}{r} u_r, \\
u_{zz} &= \left(\frac{1}{r} u_r\right)_r \frac{z^2}{r} + \frac{1}{r} u_r. \\
\Delta u &= \left(\frac{1}{r} u_r\right)_r r + \frac{1}{r} u_r = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r.
\end{aligned}$$

Таким образом, для радиального решения, уравнение $u_{tt} = \Delta u$ приобретает вид

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r.$$

Это уравнение именное, и называется **уравнением Эйлера—Пуассона—Дарбу**. Попробуем избавиться от u_r, совершив замену $u = r^\alpha \upsilon$. Получим

$$\begin{aligned}
u_r &= \alpha r^{\alpha-1} \upsilon + r^\alpha \upsilon_r, \\
u_{rr} &= \alpha\left(\alpha - 1\right) r^{\alpha-2} \upsilon + 2\alpha r^{\alpha-1} u_r + r^\alpha \upsilon_{rr}.
\end{aligned}$$

Чтобы υ и υ_r исчезли, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-1)+\alpha(n-1)=0, \\ 2\alpha+(n-1)=0. \end{cases} \Rightarrow n=3,\ \alpha=-1$$

Таким образом, размерность 3 с точки зрения волнового уравнения оказывается особенной: только в трехмерном случае удается избавиться от младших производных.

Итак в трехмерном случае для υ мы получаем уравнение

$$\upsilon_{tt}=\upsilon_{rr}.$$

Его решение имеет вид

$$\upsilon(t,r)=f(t-r)+g(t+r),$$

а решение исходного уравнения — вид

$$u(t,x,y,z)=\frac{f(t-r)+g(t+r)}{r}.$$

Такое решение называется **сферической волной**.

7.4..1 Формула Пуассона для трехмерного волнового уравнения

Перейдем теперь к нашему основному вопросу: как найти решение волнового уравнения, которое мы будем записывать двумя способами:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ u\,|_{t=0} &= \varphi(x,y,z), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi(x,y,z), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2\Delta u, \\ u\,|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned}$$

Во второй форме x — трехмерный вектор, соответствующий (x,y,z) в первой записи.

Основное соображение, позволяющее получить решение, навевается формулой сферических волн. Из этой формулы следует, что на значения решения в точке x в момент времени t оказывает влияние значения решения в момент времени $t=0$, находящиеся только на расстоянии at от x. Причем, в силу равноправия всех направлений (ведь волновое уравнение не меняется при повороте системы координат) это влияние оказывается в определенной мере «равноправным». Это приводит к мысли: для любой точки $x\in\mathbb{R}^3$ рассмотреть функцию

$$U(t,r,x)=\frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\xi\in S_r(x)} u(t,\xi)\,dS,$$

(где $S_r(x)$ — сфера радиуса r с центром в точке x), и попробовать исследовать ее связь с решением. Эта функция удобна потому, что

$$U(t,r,x)\xrightarrow[r\to 0]{} u(t,x),$$

т. к. сфера стягивается в точку, а $u(t,x)$ — непрерывная функция, и потому для любого ε найдётся такое r, что для любых $\xi : |\xi - x| < r$ будет выполнено

$$u(t,x) - \varepsilon \leqslant U(t,\xi) \leqslant u(t,x) + \varepsilon,$$

а значит

$$[u(t,x) - \varepsilon]\,1 \leqslant U(t,r,x) \leqslant [u(t,x) + \varepsilon]\,1.$$

Что и означает, что $U(t,r,x) \xrightarrow[r\to 0]{} u(t,x)$.

Вычислим

$$U_{tt} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\xi \in S_r(x)} u_{tt}(t,\xi)\, dS$$

и производные функции $U(t,r,x)$ по r. Для этого удобно под интегралом сделать замену $\xi = x + r\theta$, откуда $r\theta = \xi - x \in S_r(0)$, а значит $\theta \in S_1(0)$. Тогда, поскольку $dS_r = r^2 dS_1$,

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\theta\in S_1(0)} u(t,x+r\theta)\, dS\right) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\theta\in S_1(0)} (\nabla u(t,x+r\theta),\theta)\, dS =$$

$$\text{(возвращаемся к переменной } \xi) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\xi\in S_r(x)} (\nabla u(t,\xi),\theta)\, dS =$$

$$\text{(формула Гауса–Остроградского)} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\xi\in B_r(x)} \Delta u(t,\xi)\, dV = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_0^r \int\limits_{\xi\in S_\rho(x)} \Delta u(t,\xi)\, dS d\rho.$$

Теперь умножим полученное равенство на r^2 и еще раз продифференцируем по r. Получим

$$\left(r^2 U_r\right)_r = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\xi\in S_r(x)} \Delta u(t,\xi)\, dS.$$

Таким образом, если $u(t,x)$ — решение волнового уравнения, то для функции U может быть написано дифференциальное уравнение

$$U_{tt} = a^2\left(r^2 U_r\right)_r \frac{1}{r^2} = a^2\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right),$$

т. е. функция U удовлетворяет уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу. Для того, чтобы найти решение, нам необходимо знать начальные условия

$$U(t,r,x)\,|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\xi\in S_r(x)} \varphi(\xi)\, dS,$$

$$U_t(t,r,x)\,|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{\xi\in S_r(x)} \psi(\xi)\, dS.$$

Теперь у нас все решается: уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу заменой $U = \dfrac{V}{r}$, $V = rU$, сводится к волновому уравнению $V_{tt} = a^2 V_{rr}$, причем $V\,|_{r=0} = 0$. Его решение имеет вид

$$V = f(t - ar) + g(t + ar),$$

и, обозначая

$$V\,|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r}\int\limits_{\xi\in S_r(x)} \varphi\left(\xi\right) dS = \Phi\left(r\right), \quad V_t\,|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r}\int\limits_{\xi\in S_r(x)} \psi\left(\xi\right) dS = \Psi\left(r\right), \tag{7.3}$$

мы получим выражение для $V\left(t,r\right)$ (по формуле Д'Аламбера при $r > at$ и в силу условия $V\,|_{r=0} = 0$ при $r < at$):

$$V\left(t,r\right) = \frac{\Phi\left(at+r\right) - \Phi\left(at-r\right)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-r}^{at+r} \Psi\left(\rho\right) d\rho.$$

А выражение для U будет иметь вид

$$U\left(t,r,x\right) = \frac{\Phi\left(at+r\right) - \Phi\left(at-r\right)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int\limits_{at-r}^{at+r} \Psi\left(\rho\right) d\rho.$$

Таким образом, мы получили формулу для $U\left(t,r,x\right)$ и нам остается совершить предельный переход

$$u\left(t,x\right) = \lim_{r\to 0} U\left(t,r,x\right) = \Phi'\left(at\right) + \frac{1}{a}\Psi\left(at\right),$$

что с учетом введенных нами обозначений (7.3), дает

$$u\left(t,x\right) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{\xi\in S_{at}(x)} \psi\left(\xi\right) dS + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\xi\in S_{at}(x)} \varphi\left(\xi\right) dS\right), \tag{7.4}$$

где dS — элемент площади на сфере радиуса at с центром в точке x. Эта формула носит название **формулы Пуассона**. Таким образом доказана теорема.

Теорема 7..1 *Решение начальной задачи для волнового уравнения в* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2\Delta u, \quad x\in\mathbb{R}^3 \\ u\,|_{t=0} &= \varphi\left(x,y,z\right), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi\left(x,y,z\right), \end{aligned}$$

задается формулой Пуассона (7.4). Решение является классическим, если $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$*,* $\psi \in C^3(\mathbb{R}^3)$*.*

7.4..2 Формула запаздывающих потенциалов

Принцип Дюамеля позволяет написать решение и для уравнения с правой частью. Пусть

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f\left(t,x,y,z\right)$$

решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} u\,|_{t=0} &= \varphi\left(x,y,z\right), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi\left(x,y,z\right), \end{aligned}$$

в точке $t = 0$ для $\varphi \equiv 0$ имеет вид

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS,$$

в точке $t = \tau$

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int\limits_{\xi \in S_{a(t-\tau)}(x)} \psi_\tau(\xi)\, dS,$$

а интеграл Дюамеля тогда приобретает вид

$$u(t,x) = \int\limits_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} f(\tau,\xi)\, dS d\tau = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^{at} \int\limits_{\xi \in S_\rho(x)} \frac{f\left(t - \frac{\rho}{a}, \xi\right)}{\rho} dS d\rho$$

(здесь сделана замена переменных $\rho = a(t-\tau)$). Поскольку двойной интеграл представляет собой просто интеграл по шару, получаем

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\xi \in B_{at}(x)} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} dV.$$

Эта формула называется **формулой запаздывающих потенциалов**. Название не очень правильное. Оно ассоциировано с формулой для потенциала электрического или гравитационного поля $U(x) = \int \frac{f(\xi)}{|\xi - x|} d\xi$, но, как видно, запаздывает в формуле значение аргумента у функции f, а не потенциал. Таким образом доказана еще одна теорема.

Теорема 7..2 *Решение начальной задачи для неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющего нулевым начальным условиям:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u + f(t,x,y,z), \quad x \in \mathbb{R}^3 \\ u\,|_{t=0} &= 0, \\ u_t\,|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

задается формулой запаздывающих потенциалов

$$U(x) = \int \frac{f(\xi)}{|\xi - x|} d\xi.$$

7.4..3 Формула Кирхгофа

Объединение формулы Пуассона и формулы запаздывающих потенциалов дает формулу, которую часто называют **формулой Кирхгофа** — формулу решения задачи Коши для волнового уравнения. Более точно Кирхгофом была получена следующая формула.

Теорема 7..3 *Пусть $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(zaR^3)$. Тогда классическое решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u\,|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \tag{7.5}$$

задается ***формулой Кирхгофа***

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \frac{\partial}{\partial n}\varphi(\xi)\, dS. \qquad (7.6)$$

Доказательство. В предыдущей лекции доказано, что решение задачи Коши (7.5) определяется формулой Пуассона (7.4). Сделаем замену переменных в (7.4):

$$\xi = x + a\theta, \quad dS = dS_\xi = a^2 t^2 dS_\theta,$$

где dS_θ — элемент площади на единичной сфере с центром в 0, θ — вектор единичной нормали к сфере радиуса at с центром в x.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS_\xi\right) = a^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(t \cdot \int\limits_{\theta \in S_1(0)} \varphi(x + at\theta)\, dS_\theta\right) =$$

$$= a^2 \left(\int\limits_{\theta \in S_1(0)} \varphi(x + at\theta)\, dS_\theta + at \int\limits_{\theta \in S_1(0)} (\nabla\varphi(x + at\theta), \theta)\, dS_\theta\right) =$$

(вернемся к переменной $\xi = x + at\theta$)

$$= \frac{1}{t^2}\int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS_\xi + \frac{a}{t}\int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \underbrace{(\nabla\varphi(\xi), \theta)}_{\frac{\partial\varphi}{\partial n}} dS_\xi = \frac{1}{t^2}\int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS_\xi + \frac{a}{t}\int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \frac{\partial}{\partial n}\varphi(\xi)\, dS_\xi.$$

В результате получаем:

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi)\, dS + \frac{1}{4\pi a t} \int\limits_{\xi \in S_{at}(x)} \frac{\partial}{\partial n}\varphi(\xi)\, dS,$$

что и требовалось доказать. ■

7.4..4 Метод спуска. Формула Пуассона для двумерного волнового уравнения

Рассматриваем по-прежнему многомерное волновое уравнение. Решим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u\,|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned}$$

в случае двух пространственных переменных при $n = 2$, $x \in \mathbb{R}^2$. Оказывается, что формула решения задачи Коши в случае $n = 2$ выводится из формулы решения задачи Коши размерности $n = 3$.

Метод, позволяющий свести задачу большей размерности к задаче меньшей размерности, называется **методом спуска**.

Пусть $u(t,x) = u(t,x,y,z)$ решение задачи Коши в случае $n = 3$ и пусть начальные функции φ и ψ не зависят от z, т. е. $\psi = \psi(x,y)$, $\varphi = \varphi(x,y)$. Решение этой задачи задается формулой Пуассона:

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S_{at}(x,y,z)} \psi(\xi,\eta)\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S_{at}(x,y,z)} \varphi(\xi,\eta)\, dS,$$

dS — элемент площади на сфере радиуса at с центром в точке (x,y,z), (ξ,η,ζ) — вектор.

Начальные функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ заданы в $\mathbb{R}^3$, но они не зависят от z, поэтому интегрирование по сфере в $\mathbb{R}^3$ можно свести к интегрированию по кругу в $\mathbb{R}^2$. Сфера радиуса R с центром в точке (x,y,z) проецируется в круг того же радиуса R с центром в точке (x,y). Проекция двукратная: одной и той точке на круге отвечает две точки: одна на верхней, а другая на нижней полусфере. Поскольку φ, ψ не зависят от z, интегралы по верхней и по нижней полусферам совпадают, и мы можем рассматривать только верхнюю полусферу, удвоив интеграл:

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S^+_{at}(x,y,z)} \psi(\xi,\eta)\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S^+_{at}(x,y,z)} \varphi(\xi,\eta)\, dS.$$

Координаты любой точки сферы (ξ,η,ζ) связаны с координатами центра сферы соотношениями

$$\begin{aligned}
\xi &= x + R\sin\alpha\cos\beta,\\
\eta &= y + R\sin\alpha\cos\beta,\\
\zeta &= z + R\cos\alpha,
\end{aligned}$$

где R — радиус сферы, α — угол между нормалью к сфере и осью z, β — угол между проекцией нормали на плоскость круга с центром (x,y) и осью x. Элемент площади круга равен $d\xi d\eta = J d\alpha d\beta$, где J — якобиан замены переменных $(\xi,\eta) \to (\alpha,\beta)$:

$$J = \begin{vmatrix} R\cos\alpha\cos\beta & -R\sin\alpha\sin\beta \\ R\cos\alpha\sin\beta & R\sin\alpha\cos\beta \end{vmatrix} = R^2\cos\alpha\sin\alpha.$$

$$d\xi d\eta = R^2\cos\alpha\sin\alpha d\alpha d\beta = \cos\alpha dS \quad \Rightarrow \quad dS = \frac{d\xi d\eta}{\cos\alpha},$$

т. к. $dS = R^2\sin\alpha d\alpha d\beta$,

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\zeta - z}{R},\\
\zeta - z &= \sqrt{R^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2},
\end{aligned}$$

окончательно получаем

$$dS = \frac{R d\xi d\eta}{\sqrt{R^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}.$$

Учитывая, что $R = at$ и что в каждую точку круга проецируется две точки сферы (с верхней и с нижней полусфере) получим

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S_{at}^{+}(x,y,z)} \psi(\xi,\eta)\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in S_{at}^{+}(x,y,z)} \varphi(\xi,\eta)\, dS =$$

$$= \frac{at}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta)\in B_{at}(x,y)} \frac{\psi(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{at}{2\pi a^2 t} \int\limits_{(\xi,\eta)\in B_{at}(x,y)} \frac{\varphi(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}.$$

Если (x,y) — двумерный вектор, его можно заменить одной буквой $(x,y) = x$, тогда формула записывается короче:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{\xi\in B_{at}(x)} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} dS + \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{2\pi a} \int\limits_{\xi\in B_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} dS. \qquad (7.7)$$

Эта формула носит название **формулы Пуассона**.

Отметим, что гладкость решения не вполне соответствует гладкости начальных функций: из $u(t,x) \in C^2$ следует, что $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$, однако такая формула дает $u \in C^2$ только при повышенных требованиях гладкости к начальным данным: $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 7..4 *Пусть функции $\varphi(x,y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\big|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned}$$

задается формулой Пуассона (7.7).

7.5. Задача Коши на наклонной прямой для волнового уравнения

Рассмотрим уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ и пусть для этого уравнения начальные данные заданы не на прямой $t = 0$, а на прямой$t = kx$.

$$\begin{aligned} u\big|_{t=kx} &= \varphi(x), \\ u_t\big|_{t=kx} &= \psi(x). \end{aligned}$$

Подставляя в эти условия общее решение уравнения

$$u(t,x) = f(x - at) + g(x + at),$$

мы получаем систему

$$\begin{aligned} f(x(1-ak)) + g(x(1+ak)) &= \varphi(x), \\ -af'(x(1-ak)) + ag'(x(1+ak)) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Интегрируя второе уравнение, получаем

$$\frac{a}{ak-1}f\left(x\left(1-ak\right)\right)+\frac{a}{ak+1}g\left(x\left(1+ak\right)\right)=\int\limits_0^x\psi\left(s\right)ds$$

и, комбинируя с первым, находим

$$\left(\frac{a}{ak-1}-\frac{a}{ak+1}\right)f\left(x\left(1-ak\right)\right)=\int\limits_0^x\psi\left(s\right)ds-\frac{a}{ak+1}\varphi\left(x\right),$$

$$\left(\frac{a}{ak+1}-\frac{a}{ak-1}\right)g\left(x\left(1+ak\right)\right)=\int\limits_0^x\psi\left(x\right)ds-\frac{a}{ak-1}\varphi\left(x\right).$$

Итак,

$$f\left(x\right)=\frac{a^2k^2-1}{2a}\int\limits_0^{\frac{x}{1-ak}}\psi\left(x\right)ds-\frac{ak-1}{2}\varphi\left(\frac{x}{1-ak}\right),$$

$$g\left(x\right)=-\frac{a^2k^2-1}{2a}\int\limits_0^{\frac{x}{1-ak}}\psi\left(s\right)ds+\frac{ak+1}{2}\varphi\left(\frac{x}{1-ak}\right).$$

Эти формулы в принципе ничем не хуже формул, полученных в случае обычных начальных условий, если только не считать случай $k=\pm\frac{1}{a}$: в этом случае совершенно неясно, как понимать полученные формулы. Оказывается, что заниматься бесплодным воображением в попытках ответить на вопрос "что значит формулы при $k=\frac{1}{a}$?"нет никакого смысла, а надо просто вернуться к исходной системе, которая при $k=\frac{1}{a}$ принимает вид:

$$f\left(0\right)+g\left(2x\right)=\varphi\left(x\right),$$
$$-af'\left(0\right)+ag'\left(2x\right)=\psi\left(x\right).$$

Здесь уже ясно видно, что на функцию f никаких ограничений практически не накладывается, зато относительно функции мы получаем аж два уравнения, которые совсем не обязательно являются совместными. Чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$-af'\left(0\right)+\frac{a}{2}\varphi'\left(x\right)=\psi\left(x\right),$$

или, что эквивалентно, чтобы

$$a\varphi''\left(x\right)=2\psi'\left(x\right).$$

При выполнении этого условия второе условие определяет лишь значение $f'\left(0\right)$, а первое — функцию $g\left(x\right)$. Остается произвол в выборе $f\left(x\right)$. Если же указанное условие не выполняется, то задача вообще решений не имеет.

Возникает естественный вопрос, что же это за такие исключительные значения $k=\pm\frac{1}{a}$? Вспомнив, что нас интересовали прямые $t=kx$,, легко увидеть, что при $k=\pm\frac{1}{a}$ мы получаем характеристики $x=\pm at$. Таким образом, для характеристик задача Коши оказывается некорректной: она либо не имеет решения совсем, либо решений оказывается бесконечно много.

7.6. Задача Гурса

С характеристиками обычно связывают не начальную задачу (которая, как уже было показано, некорректна), а другую задачу, которую называют **задачей Гурса**.

Теорема 7..5 *Решение задачи Гурса:*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \\ u\,\big|_{x=at} &= \varphi(x), \\ u\,\big|_{x=-at} &= \psi(x). \end{aligned}$$

описывается формулой:

$$u(t,x) = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+at}{2}\right) - \varphi(0)$$

и оно является классическим, если φ и ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Доказательство. В точке $(0,0)$ пересечения характеристик обычно предполагается, что имеется условие согласования:

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

Подставляя в условия, как и ранее, формулу общего решения уравнения

$$u(t,x) = f(x-at) + g(x+at),$$

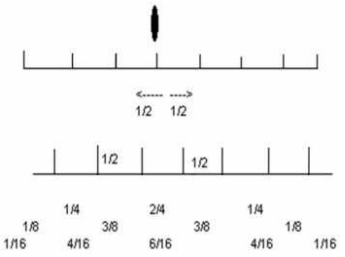
получаем систему

$$\begin{aligned} f(0) + g(2x) &= \varphi(x), \\ f(2x) + g(0) &= \psi(x), \end{aligned}$$

из которой легко определяются g и f, что и дает искомую формулу решения задачи. ■

8. Уравнение теплопроводности

‖ Уравнение вида $u_t = u_{xx}$ называется уравнением теплопроводности.



Уравнение теплопроводности встречается при изучении процессов распространения тепла, диффузии и многих других разделов физики. При диффузии вещества происходит распространение вещества в растворе. Пусть у нас есть капля чернил, которая падает в сосуд с водой. Вы знаете, что начинается окрашивание воды, свидетельствующее о распространении чернил в растворе. Этот процесс и называется **диффузией**. Для того чтобы понять модель этого процесса мы рассматриваем некую дискретную среду. Эта среда как бы состоит из ящичков, а сама капля может в каждый следующий момент «перепрыгнуть» в один из двух соседних ящиков с равной вероятностью. В такой постановке «капля» рассматривается как элементарная, неделимая частица вещества. Для реальной же капли «вероятности» реализуются как части, на которые эта капля делится, распространяясь в разные стороны. Как видно, вероятности нахождения частицы в том или ином «ящике» являются дробями, в которых при $t = n$ в знаменателе стоит 2^n, а в числителе — биномиальный коэффициент C_n^k. При увеличении n и подходящем перемасштабировании мы получаем кривую, описывающую плотность вероятности распределения по закону, открытому Гауссом.

Попробуем теперь написать дифференциальное уравнение этого процесса, $u_n(t)$ — количество частиц в момент времени t в n–ой ячейке. Пусть:

$$u_n(t + \Delta t) = \frac{1}{2}u_{n-1}(t) + \frac{1}{2}u_{n+1}(t).$$

Если обозначить за Δx шаг ячейки ($\Delta x n = x$), то имеем

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_n(t), \\ u(t, x + \Delta x) &= u_{n+1}(t), \\ u(t, x - \Delta x) &= u_{n-1}(t), \end{aligned}$$

и закон приобретает форму

$$\underbrace{u(t + \Delta t, x)}_{u_t \Delta t} = \underbrace{\frac{u(t, x + \Delta x) + u(t, x - \Delta x)}{2} - u(t, x)}_{u_{xx}\frac{(\Delta x)^2}{2}}.$$

Левая часть естественно ассоциируется с первой производной по t, а правая — со второй производной по x, поэтому при уменьшении Δx и Δu мы получим соотношение типа

$$u_t \Delta t = u_{xx} \cdot \frac{(\Delta x^2)}{2}.$$

Если предположить, что Δt и Δx уменьшаются так, что $\Delta t \approx \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}}\right)^2$, то мы получим как раз уравнение

$$u_t = u_{xx}.$$

Рассмотрим это уравнение. Для начала просто постараемся подобрать хоть какую–нибудь функцию $u(t,x)$ удовлетворяющую этому уравнению. Поиск частных решений можно осуществить и в виде полиномов, и в виде рядов по степеням t, но нам бы хотелось здесь продемонстрировать прием, связанный с поиском частных решений, которые механики часто называют *автомодельными*. Заметим, что уравнение теплопроводности является инвариантным относительно замены

$$x = \lambda\tilde{x}, \quad t = \lambda^2\tilde{t}.$$

Поэтому имеет смысл искать решение в виде $u(t,x) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$. Подставим эту функцию в уравнение, найдя ее производные.

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{2x}{t}v'\left(\frac{x^2}{t}\right),\\
u_{xx} &= \left(\frac{2x}{t}v'\left(\frac{x^2}{t}\right)\right)_x = \frac{2}{t}v'\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{4x^2}{t^2}v''\left(\frac{x^2}{t}\right),\\
u_t &= -\frac{x^2}{t^2}v'\left(\frac{x^2}{t}\right).\\
-\frac{x^2}{t^2}v'\left(\frac{x^2}{t}\right) &= \frac{2}{t}v'\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{4x^2}{t^2}v''\left(\frac{x^2}{t}\right).
\end{aligned}$$

Если обозначим $\frac{x^2}{t} = p$, $x^2 = pt$, то полученное соотношение примет вид

$$-\frac{p}{t}v'(p) = \frac{2}{t}v'(p) + \frac{4p}{t}v''(p),$$

и после умножения уравнения на t получим обыкновенное дифференциальное уравнение. Решим его.

$$\begin{aligned}
-pv'(p) &= 2v'(p) + 4pv''(p),\\
-pv'(p) - 2v'(p) &= 4pv''(p),\\
-(p+2)v'(p) &= 4pv''(p),\\
\frac{v''}{v'} &= -\frac{p+2}{4p},\\
v'(p) &= C\frac{e^{-\frac{p}{4}}}{\sqrt{p}},\\
v(p) &= C\int\limits_p^\infty \frac{e^{-\frac{\sigma}{4}}}{\sqrt{\sigma}}d\sigma = 4C\int\limits_p^\infty e^{-\frac{\sigma}{4}}d\frac{\sqrt{\sigma}}{2} = 4C\int\limits_{\frac{\sqrt{p}}{2}}^\infty e^{-s^2}ds.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили решение вида

$$u(t,x) = C\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2}ds.$$

Из этого решения можно «произвести» целую серию. Действительно, сдвиг начала отсчета пространственной переменной не меняет исходное уравнение, поэтому, как нетрудно проверить, решением будет и функция

$$u(t,x) = C \int\limits_{\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds,$$

и комбинация таких функций (в силу принципа суперпозиции)

$$u(t,x) = \sum_i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{|x-\xi_i|}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds g(\xi_i).$$

Комбинацию можно сделать и континуальной, что дает

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds \right] \underbrace{g(\xi)\, d\xi}_{d \int\limits_{\xi}^{\infty} g(s) ds} =$$

(берем интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ по частям)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int\limits_{\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds \right] \cdot \left[\int\limits_{\xi}^{\infty} g(s)\, ds \right] \Bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\xi}^{\infty} g(s)\, ds \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi, \quad \text{где} \quad G(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\infty} g(s) ds.$$

Формулу

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \tag{8.1}$$

называют **формулой Пуассона** или **интегралом Пуассона**.

Рассмотрим некоторые его свойства. Не трудно проверить, что функция $\Phi(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$ является решением уравнения теплопроводности. Она играет центральную роль в силу ряда уникальных свойств, и поэтому ее называют не просто решением, а **фундаментальным решением уравнения теплопроводности**. Во-первых, она неотрицательна и бесконечно дифференцируема при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$. Во-вторых,

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0, \quad \text{при} \quad x \neq \xi; \qquad \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \xrightarrow[t\to 0]{} \infty, \quad \text{при} \quad x = \xi.$$

Итак, $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ всюду кроме одной точки. Любопытным свойством обладает интеграл от этой функции по оси $(-\infty, +\infty)$.

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\frac{(x-\xi)}{\sqrt{4t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}ds = 1,$$

то есть, хотя функция и стремится при $t \to 0$ к нулю всюду, кроме одной точки, интеграл от нее остается равным единице и к нулю не стремится. Природа этого явления становится более ясной если взглянуть на график этой функции при различных $t > 0$.

Теорема 8..1 *Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности*

$$u_t = u_{xx}, \quad u\,|_{t=0} = g\,(x) \tag{8.2}$$

описывается формулой Пуассона (8.1):

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\xi}^{\infty} g(s)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}dsd\xi.$$

Решение является бесконечно дифференцируемым при $t > 0$ для любой непрерывной функции $g(x)$, а при $t = 0$ оно будет иметь первую производную по t и вторую по x только если $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Ранее доказано, что эта функция удовлетворяет уравнению $u_t = u_{xx}$ (поскольку $\Phi\,(t,x,\xi)$ этому уравнению удовлетворяет). Теперь надо убедиться в том, что $u\,(t,x) \underset{t\downarrow 0}{\longrightarrow} g\,(x)$. Для этого рассмотрим разность $u\,(t,x)$ и $g\,(x)$. Представление для $g\,(x)$ имеет вид

$$g\,(x) = \frac{g\,(x)}{\sqrt{4\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi.$$

Это дает представление для разности $u\,(t,x) - g\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,(g\,(\xi) - g\,(x))\,d\xi.$

Фиксируем x и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует t_0 такое, что для любых t: $0 < t < t_0$ верно $|u\,(t,x) - g\,(x)| < \varepsilon$. Разобьем интеграл на три части: I_1 от $-\infty$ до $x - \delta$, I_2 от $x - \delta$ до $x + \delta$, I_3 от $x + \delta$ до $+\infty$. Оценим интегралы I_1, I_2, I_3 при условии, что функция $g\,(\xi)$ ограничена на оси.

$$|I_1| \le \frac{2}{\sqrt{4\pi t}}\sup_{\xi\in \mathrm{R}^1}|g\,(\xi)|\int\limits_{-\infty}^{x-\delta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi$$

Сделав замену переменной интегрирования $s = \dfrac{\xi - x}{\sqrt{4\pi t}}$, получим

$$|I_1| \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sup_{\xi\in \mathrm{R}^1}|g\,(\xi)|\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-s^2}ds.$$

Интеграл в правой части стремится к нулю при $t \downarrow 0$, поэтому I_1 можно сделать малым за счет выбора малых t. Аналогично оценка для I_3 выглядит

$$|I_3| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sup_{\xi \in \mathrm{R}^1} |g(\xi)| \int\limits_{\frac{\delta}{\sqrt{4t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

и поэтому I_3 тоже можно сделать малым. Наконец, для I_2

$$|I_2| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{\xi \in [x-\delta, x+\delta]} |g(x) - g(\xi)| \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi.$$

Если функция g непрерывна в точке x, тогда по $\varepsilon > 0$ выберем δ таким, что для любого ξ такого, что $|\xi - x| < \delta$, выполнено $|g(x) - g(\xi)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Выбирая далее t_0 достаточно малым, таким, что для любого t: $0 < t < t_0$ верно

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-s^2} ds \leq \frac{\varepsilon}{6 \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^1} |g(\xi)|},$$

получим

$$|u(t,x) - g(x)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Полученный результат можно усилить, обосновав не только поточечную, но и равномерную сходимость $u(t,x)$ к $g(x)$. Действительно, если функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[-A, A]$, то можно по $\varepsilon > 0$ выбрать такое $\delta = \delta(\varepsilon, A)$, что для любого $x \in [-A, A]$ и любого ξ: $|\xi - x| < \delta$ будет выполнено $|g(x) - g(\xi)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $I_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Оценки I_1 и I_3 итак являются равномерными, поэтому $u(t,x)$ сходится равномерно на $[-A, A]$ к $g(x)$ при $t \downarrow 0$.

Вывод: непрерывная и ограниченная функция $g(x)$ на вещественной оси в условии задачи Коши обеспечивает равномерную сходимость $u(t,x)$ к $g(x)$ при $t \downarrow 0$ на каждом отрезке $[-A, A]$. Таким образом формула Пуассона дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Как видно, основную роль в обосновании сходимости сыграло как раз то, что функция $\Phi(t,x,\xi)$ при $t \downarrow 0$ сходится при $x \neq \xi$ к нулю, а при $x = \xi$ — к бесконечности, но «такой большой», что интеграл от нее дает единицу. Для обозначения предела такой функции вводят символическое обозначение $\delta(x)$ для функции, называемой δ–**функцией Дирака** и обладающей следующими свойствами:

- $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$;
- $\delta(x) = +\infty$ при $x = 0$;
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi)\, g(\xi)\, d\xi = g(x)$ для любой непрерывной функции $g(x)$.

Завершая изучение уравнения теплопроводности обсудим решения смешанных задач. Оказывается, что сюда естественным образом переносятся принципы, выработанные при изучении волнового уравнения. Рассмотрим задачу (8.2), но поставленную на полуоси $x > 0$ с граничным условием при $x = 0$.

1. Если граничное условие $u\,|_{x=0} = 0$, то продолжение $g(x)$ нечетным образом дает с помощью формулы Пуассона решение этой задачи. Условия согласования определяются как и в случае волнового уравнения и имеют вид: $g(0) = 0$, $g''(0) = 0$.
2. Если граничное условие $u_x\,|_{x=0} = 0$, функцию $g(x)$ следует продолжить уже четным образом. Покажем, что граничные условия в этом случае будут выполнены.

$$u_x(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\frac{x-\xi}{2t} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} g(\xi)\, d\xi$$

Интегрируя по частям, получаем

$$u_x(t,x) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} g(\xi)\,|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} g'(\xi)\, d\xi$$

Первое слагаемое равно нулю, второе при $x = 0$ обращается в нуль в силу нечетности $g'(\xi)$[3]. Условия согласования, гарантирующие классическую гладкость решения имеют естественную форму $g'(0) = 0$.

Теорема 8..2 *Задача Коши для многомерного уравнения теплопроводности*

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u\,|_{t=0} &= g(x), \end{aligned}$$

также решается с помощью формулы Пуассона, которая в многомерном случае приобретает вид:

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} g(\xi)\, dV_\xi.$$

[3]здесь мы предполагаем, что кроме $g(x)$, также существует и ограничена ее производная $g'(x)$

9. Метод Фурье (метод разделения переменных)

9.1. Метод Фурье для одномерного волнового уравнения

Гармонические сочетания звуков, производимых музыкальными инструментами, привлекали внимание людей с древнейших времен. Одним из основных законов, управляющих гармонией, в древнегреческой науке считался закон числовых отношений: каждому звуку соответствовало число, паре звуков — пропорция, тройке звуков — тройная пропорция и т.д.

Те из вас, кто учился музыке, наверное знают, что если струну прижать посередине, то она будет издавать звук, на октаву выше. А если на одной трети, то это будет звук, который выше на октаву + квинту. Собственно, именно поэтому и появляется созвучие: оно связано с наличием у звучащей струны не только *основного тона*, но и *обертонов*, которые отвечают долям этой струны (половине, трети, четверти и т.д.). Созвучность, гармоничность звучания как раз и определяются наличием у двух звуков общих обертонов.

С математической точки зрения звучание струны связано с ее колебаниями, которые мы наблюдаем практически невооруженным глазом как некоторые формы веретенообразного вида. Поскольку эти колебания описываются с достаточной степенью точности уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

нам бы следовало понять, какие решения соответствуют таким колебаниям. Наиболее естественно предположить, что при этих колебаниях форма струны сохраняется и описывается некоторой функцией $y(x)$, а колебания состоят в том, что эта форма в разные моменты времени видна «с разным коэффициентом», коэффициент описывается, как функция $h(t)$. Таким образом, обсуждаемые нами колебания логично считать функциями вида

$$u(t,x) = h(t)\, y(x).$$

Подставив эту функцию в уравнение, получаем

$$\ddot{h}(t)\, y(x) = a^2 h(t)\, y''(x).$$

И после деления на $a^2 h(t)$и на $y(x)$:

$$\frac{\ddot{h}(t)}{a^2 h(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda.$$

Это соотношение чрезвычайно примечательно. Обратите внимание: слева стоит функция, зависящая только от t (и не зависящая от x). Справа — функция, зависящая только от x (и не зависящая от t). А посередине — знак равенства, т. е. это на самом деле одна и та же функция. Поскольку она, с одной стороны, не зависит от t, а с другой — не зависит от x, она вообще ни от чего не зависит, и является константой. Обозначим ее через λ. Тогда наше соотношение мгновенно «разваливается» в пару обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \lambda y(x), \\ \ddot{h}(t) &= a^2 \lambda h(t). \end{aligned}$$

Оказывается, первое из этих уравнений можно снабдить еще и дополнительными условиями. Ведь струна закреплена, т. е.

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

И подстановка сюда нашего решения дает:

$$y(0)\,h(t) = y(l)\,h(t) = 0.$$

Здесь возможно два варианта. Либо $h(t) \equiv 0$ (и тогда $u(t,x) \equiv 0$), но этот случай нас не интересует, так как о том, что однородное уравнение имеет тривиальное решение, мы знаем безо всякой науки, и оно нас меньше всего интересует, так как описывает не колеблющуюся структуру, а покоящуюся. Либо, $h(t) \neq 0$ и тогда $y(0) = y(l) = 0$. Эта пара

$$y''(x) = \lambda y(x),$$
$$y(0) = y(l) = 0,$$

образует спектральную задачу.

Спектральная задача — это задача определения тех λ, при которых уравнение имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям.

Как решать спектральную задачу? Есть два способа решения.

1 Рассматривать варианты:

- $\lambda > 0$ ($\lambda = \omega^2$), что не дает никаких решений, кроме тривиальных;
- $\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$), что дает при $\lambda_n = -\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$ собственные функции $y_n(x) = C \sin \dfrac{\pi n x}{l}$;
- $\lambda = 0$, что тоже не дает нетривиальных решений.

2 Вместо рассмотрения различных возможностей относительно знакаλ, считать всегда $\lambda = \omega^2$, где ω может быть комплексным.

В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x},$$

подстановка его в первое условие дает

$$y(0) = C_1 = -C_2,$$

откуда

$$C_1 = -C_2,$$

а подстановка во второе

$$y(l) = C_1\left(e^{\omega l} - e^{-\omega l}\right) = 0$$

приводит к альтернативе: либо $C_1 = 0$ (и тогда решение тривиальное), либо $e^{\omega l} = -e^{-\omega l}$, т.е. $e^{2\omega l} = 1$. Для того, что бы четко разобраться, к чему это уравнение нас обязывает, вспомним, как решается уравнение $e^z = 1$. Подставляя $z = a + ib$, получаем $e^z = e^a(\cos b + i \sin b) = 1$. Откуда $e^a = 1$ (модули чисел совпадают), а значит $a = 0$. А тогда

$\cos b + i \sin b = 1$, что может иметь место только когда $b = 2\pi n$. Таким образом, решением уравнения $e^z = 1$ является набор чисел $z = 2\pi n i$.

Возвращаясь к нашей задаче, мы получаем

$$2\omega l = 2\pi n i, \quad \omega = \frac{\pi n i}{l}, \quad \lambda = \lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2},$$

т. е. то же, что и в «вещественных» рассуждениях.

$$y = C\left(e^{\frac{\pi n i x}{l}} - e^{-\frac{\pi n i x}{l}}\right) = \tilde{C} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Итак, наша спектральная задача имеет следующее решение: собственные значения равны

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2},$$

собственная функции имеют вид

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Подставляя найденные λ_n в уравнение $\ddot{h} = a^2 \lambda h$, получаем, что

$$h_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l},$$

и, таким образом, решение уравнения струны интересующего нас вида описываются формулой

$$u_n(t, x) = \sin \frac{\pi n x}{l} \left(A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}\right).$$

Число $\dfrac{\pi n a}{l}$ — частота колебаний — как раз определяет высоту звука. Как видим, оно очень тесно связано с формой колебаний, которая описывается функцией $\sin \dfrac{\pi n x}{l}$. Нетрудно увидеть, что n как раз и есть число «веретен», которые мы видим. Поскольку сумма решений является решением, мы получаем следующее семейство решений волнового уравнения:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \left(A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}\right). \tag{9.1}$$

Отличительной чертой этой формулы является то, что она не является конечной. Она представляет собой ряд из бесконечного числа членов.

Для того, чтобы соотнести эту формулу с решениями, которые мы обсуждали раньше, попробуем подставить нашу формулу в начальные условия (ведь решения и начальные условия находятся во взаимно однозначном соответствии). Подставляя в формулу $t = 0$, получаем

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

А после дифференцирования формулы решения по t (пока формального):

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Мы получили задачу: как разложить функцию (т. е. представить ее в виде суммы) по синусам? Отметим, что задача эта нетривиальная: представление решения в виде ряда (9.1) было получено еще в конце XVIII века, его знали и Бернулли, и Эйлер, и Д'Аламбер, и эта проблема даже стояла в центре довольно серьезного научного спора между Эйлером и Д'Аламбером о том, что такое функция. Эйлер считал, что это кривая, нарисованная произвольным движением руки. Д'Аламбер — что это произвольная формула, аналитическое выражение. Поэтому общим решением «с позиции Эйлера» является формула распространяющихся волн, а с позиции Д'Аламбера — и ряд (9.1). Собственно спор был, по большому счету разрешен, французским математиком Фурье, который показал, что функция и ряд — одно и то же. Но для этого надо было понять, как по функции строить ряд. И Фурье нашел формулы для этих коэффициентов. Именно поэтому метод разделения переменных называют **методом Фурье**. Итак, ключевым моментом оказалось сделанное Фурье наблюдение о том, что интеграл от произведения разных синусов равен нулю.

Таким образом мы исследовали задачу о колебаниях струны:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= \varphi(x), \\ u_t(0,x) &= \psi(x), \\ u(t,0) &= u(t,l) = 0, \end{aligned}$$

и, пользуясь методом разделения переменных, получили представления решения в виде ряда (9.1), где

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad B_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Коэффициенты A_n, B_n найдены путем подстановки решения в начальные условия и использования того что интеграл от произведения разных синусов по отрезку $[0,l]$ равен нулю:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

9.2. Метод Фурье для одномерного уравнения теплопроводности

Аналогичные рассмотрения можно привести и для уравнения теплопроводности[4]

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \\ u(0,x) &= \varphi(x), \\ u(t,0) &= u(t,l) = 0, \end{aligned}$$

Поиск решения в виде

$$u = h(t)\,y(x)$$

[4]на самом деле Фурье рассматривал именно уравнение теплопроводности

дает разделение переменных

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = -\lambda$$

откуда получается уже известная нам спектральная задача для $y(x)$

$$y'' = \lambda y,$$
$$y(0) = y(l) = 0,$$

решение которой имеет вид

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad y_n = \sin\frac{\pi n x}{l},$$

и «сопровождающее» эту задачу уравнение для h

$$\dot{h} = \lambda h,$$

решением которого являются экспоненты

$$h = Ce^{\lambda t}, \quad h_n = e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t},$$

так что в результате мы получаем представление решение в виде порядка:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t} \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Подстановка такого решения в начальные условия дает

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

откуда C_nопределяются как раз формулами Фурье

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Уравнение теплопроводности имеет то преимущество перед волновым, что, в отличие от ряда из синусов и косинусов, ряд из экспонент сходится очень хорошо. Конечно, при $t = 0$ он расходится, но если мы берем $t \geqslant t_0 > 0$, то сходимость будет и равномерной, и дифференцируемой. Действительно, начиная с некоторого $n = N$, этот ряд мажорируется рядом из обычных экспонент (так как $\dfrac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} > n$ при достаточно больших n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t} < \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} e^{-nt}}_{\leqslant \frac{e^{-Nt}}{1-e^{-t}}} + \underbrace{\sum_{N=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}}_{C(t)} < \infty,$$

так как и первое, и второе слагаемое при $t \geq t_0$ — ограниченные непрерывные функции.

Поскольку наше решение $u(t,x)$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|C_n|\,e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}}$, а C_n для непрерывной $\varphi(x)$ ограничены: $|C_n|\leqslant 2\max\limits_{[0,l]}|\varphi(x)|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t,x)|\leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nt}}_{\text{сходится равномерно}}\ \underbrace{C}_{\max|C_n|}+\tilde{C}(t).$$

Таким образом, при $t>0$ ряд, представляющий решение $u(t,x)$ сходится и результатом является непрерывная функция. При t_0 ряд равномерно сходится, возьмем поменьше t_0 — все равно сходится, но равномерная близость будет достигаться начиная с большего n. Таким образом, $u(t,x)$ непрерывна при $t\in(0,\infty)$, $x\in\mathbb{R}$.

Покажем ее дифференцируемость. Для этого формально продифференцируем ряд:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}u}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}\right)^{k_1}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{k_2}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi nx}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t,x),$$

$$|u_n|\leqslant \underbrace{C_n}_{\leqslant\max C_n}\ n^{2k_1+k_2}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t},$$

нам достаточно показать, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k_1+k_2}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}.$$

Воспользуемся здесь признаком Д'Аламбера: найдем предел отношения соседних членов:

$$\frac{(n+1)^{2k_1+k_2}}{n^{2k_1+k_2}}\cdot\frac{e^{-\frac{\pi^2(n+1)^2a^2}{l^2}t}}{e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}}=\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2k_1+k_2}}_{\downarrow\ 1}e^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}(2n+1)\to 0.$$

Значит ряд сходится и $u(t,x)\in C^{\infty}$, $t>0$.

Теперь займемся самым интересным: связью между полученными нами представлением решения в виде ряда и полученным нами ранее представлением решения с помощью формулы Пуассона. Для этого подставим значения C_n в формулу для $u(t,x)$. Получим

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.\\ u(t,x) &= \frac{2}{l}\int_0^l\left[\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right]\varphi(\xi)\,d\xi,\end{aligned}\qquad(9.2)$$

что-то в чем-то аналогичное формуле Пуассона: решение представляется интегралом от начального условия, умноженного на некоторое «ядро» — множитель, зависящий от t,x,s.

Правда, в формуле Пуассона интеграл был по всей оси, а для задачи на отрезке требовалось продолжать начальное условие нечетным периодическим образом. Мы постараемся

привести это представление к интегралу по $[0,l]$. Для этого разобьем ось на отрезки длиной l, и на каждом отрезке сделаем замену переменной так, чтобы интегрируемая функция оказалась равной $\varphi(s)$.

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\tilde{\varphi}(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{2kl}^{(2k+1)l}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\tilde{\varphi}(s)\,ds+\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{2kl}^{(2k+1)l}e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}\tilde{\varphi}(s)\,ds=$$

(в первом слагаемом делаем замену $s=2kl+\xi$, во втором — замену $s=2(k+1)l+\xi$)

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{l}e^{-\frac{(x-\xi-2kl)^2}{4a^2t}}\tilde{\varphi}(\xi+2kl)\,d\xi+\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{l}e^{-\frac{(x-\xi-2(k+1)l)^2}{4a^2t}}\tilde{\varphi}(\xi+2(k+1)l)\,d\xi.$$

Пользуясь тем, что $\tilde{\varphi}((\xi+2k)l-\xi)=\varphi(\xi)$ и заменяя во второй сумме $k+1$ на k, получаем

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\int_0^l\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi-2(k+1)l)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi-2kl)^2}{4a^2t}}\right]\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{9.3}$$

Теперь надо показать, что (9.2) и (9.3) — одно и то же решение, то есть, что

$$\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-s-2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+s-2kl)^2}{4a^2t}}.$$

На первый взгляд, это совершенно неочевидно: слева и справа стоят совершенно различные выражения, однако не будем торопиться с выводами, а заметим, для начала, что

$$2\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}=\cos\frac{\pi n(x-s)}{l}-\cos\frac{\pi n(x+s)}{l},$$

и поэтому доказываемое равенство эквивалентно более простому:

$$\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{\pi n\xi}{l}=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\xi-2kl)^2}{4a^2t}}.$$

В этом же равенстве, для доказательства можно использовать тот факт, что две любые непрерывные функции, имеющие одинаковые коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, обязаны совпадать между собой. Поскольку и слева и справа стоят четные по ξ функции, достаточно умножить левую и правую части на $\cos\dfrac{\pi m\xi}{l}$, проинтегрировать и сравнить результат. Слева получаем

$$\frac{1}{l}\int\limits_0^l\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{\pi n\xi}{l}\cos\frac{\pi m\xi}{l}d\xi=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t}=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\int\limits_0^l\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\xi-2kl)^2}{4a^2}t}\cos\frac{\pi m\xi}{l}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{2kl}^{(2k+1)l}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}t}\cos\frac{\pi m\xi}{l}d\xi=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}t}\cos\frac{\pi m\xi}{l}d\xi.$$

Эта формула, как четко видно, совпадает с формулой для решения уравнения $u_t = u_{xx}$, удовлетворяющего условию

$$u(0,x) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi m s}{l},$$

и таким решением является, как легко проверить, функция

$$u(t,x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}\cos\frac{\pi m s}{l}.$$

Это решение вычисляется при $x = 0$ (поскольку в показателе экспоненты стоит $\xi^2 = (\xi - 0)^2$, что дает $\frac{1}{2}e^{-\frac{g^2 m^2 a^2}{l^2}t}$, то есть то же самое, что и в левой части). Таким образом, две такие разные функции оказались все-таки совпадающими, так что наши формулы дают просто разные представления одного и того же решения.

9.3. Сходимость ряда Фурье, выражающего решение волнового уравнения

Завершая вопрос о разделении переменных, вернемся к волновому уравнению. Здесь, в отличие от уравнения теплопроводности, мы не можем вот так сразу, простыми рассуждениями обосновать сходимость ряда. Самое «грубое» соображение состоит в том, что для сходимости необходимо, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|B_n| < \infty,$$

тогда ряд сходится абсолютно и равномерно, и тогда $u(t,x)$ непрерывна. Если же условия на A_n, B_n более жесткие:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2|A_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2|B_n| < \infty,$$

то ряды для производных тоже сходятся и $u(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

К сожалению, в естественных предположениях о гладкости

$$\varphi(x) \in C^2([0,l]), \quad \psi(x) \in C^1([0,l]),$$

вышеуказанными свойствами коэффициенты Фурье A_n, B_n, вообще говоря, не обладают.

Напомним: если функция дифференцируемая, то ее коэффициенты Фурье убывают быстрее $1/k$.

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi k}{l}dx = -\frac{2}{\pi k}\int_0^l \varphi(x)\,d\cos\frac{\pi k x}{l} =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{\pi k}\varphi(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\Big|_0^l}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{\pi k}\int_0^l \varphi'(x)\,d\cos\frac{\pi k x}{l}dx}_{\to 0 \text{ при } k\to\infty}.$$

Таким образом, для непрерывно дифференцируемой $\varphi(x)$ — $A_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$, а для дважды непрерывно дифференцируемой — $A_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Аналогично и для непрерывно дифференцируемой $\psi(x)$

$$B_k = \frac{1}{\pi k a} o\left(\frac{1}{k}\right) = o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Эти условия обеспечивают сходимость $\sum A_k$ и $\sum B_k$, а значит и самому ряду для $u(t,x)$, но не позволяют ничего сказать о гладкости полученного решения. Для того чтобы обеспечить сходимость рядов для производных, введем заведомо завышенные предположения о гладкости $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x) \in C^4([0,l]), \quad \psi(x) \in C^3([0,l]).$$

Впрочем, эти предположения можно чуть ослабить, воспользовавшись понятием *гельдеровой гладкости*, и тогда достаточно предполагать, что

$$\varphi(x) \in C^{(3+\varepsilon)}([0,l]), \quad \psi(x) \in C^{(2+\varepsilon)}([0,l]).$$

Функция φ имеет гельдерову гладкость α, $(0 < \alpha < 1)$, если $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^\alpha} \leqslant C$.

Для функций, имеющих гельдерову гладкость α, коэффициенты Фурье $\varphi_k \sim \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$, поэтому для функций гладкости $n+\alpha$ (n–ая производная является α–гельдеровой0, коэффициенты Фурье убывают как $k^{-(n+\alpha)}$.

9.4. Метод Фурье для неоднородных уравнений и уравнений с ненулевыми краевыми условиями

Рассмотрим в одномерном случае уравнение теплопроводности, но теперь уже неоднородное

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(t,x), \\ u\big|_{t=0} &= u_0(x), \\ u(t,0) &= u(t,l) = 0, \end{aligned} \tag{9.4}$$

и волновое уравнение, тоже неоднородное,

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(t,x), \\ u\big|_{t=0} &= u_0(x), \\ u(t,0) &= u(t,l) = 0, \end{aligned} \tag{9.5}$$

Общие решения однородных уравнений имеют вид:

$$u_{\text{оо}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l} C_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}$$

и

$$u_{\text{оо}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{l} \left(A_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin\frac{\pi n a t}{l} \right)$$

соответственно.

Попробуем найти принцип нахождения решений неоднородных уравнений. Рассмотрим сначала простейший случай. Если правая часть имеет вид

$$f(t,x) = \sin\frac{\pi m x}{l},$$

то решение естественно искать в таком виде:

$$u(t,x) = C\sin\frac{\pi m x}{l},$$

и подстановка этой функции и в уравнение теплопроводности, и в волновое уравнение дает

$$-a^2 C\frac{\pi^2 m^2}{l^2}\sin\frac{\pi m x}{l} + \sin\frac{\pi m x}{l} = 0,$$

откуда

$$C = \frac{a^2 l^2}{\pi^2 m^2}.$$

Комбинированный случай. Если правая часть имеет вид

$$f(t,x) = f_1(t)\sin\frac{\pi m_1 x}{l} + \ldots + f_k(t)\sin\frac{\pi m_k x}{l}, \tag{9.6}$$

то можно воспользоваться *принципом суперпозиции*, найдя решение отдельно для каждого слагаемого в правой части и сложив их вместе.

Принцип суперпозиции на математическом языке означает линейность: если L — линейный дифференциальный оператор и $Lu_1 = f_1$, $Lu_2 = f_2$, то $L(u_1 + u_2) = f_1 + f_2$.

Если $f_j(t)$ в (9.6) — константы, то это простейший случай. А если нет? Если правая часть имеет вид $f(t)\sin\frac{\pi m x}{l}$, то решение, конечно, имеет смысл искать непостоянным, и простейшее, что приходит на ум, это

$$u(t,x) = h(t)\sin\frac{\pi m x}{l}.$$

Подставляя, например, в уравнение теплопроводности, получаем

$$\dot{h}\sin\frac{\pi m x}{l} = -a^2 h^2\frac{\pi^2 m^2}{l^2}\sin\frac{\pi m x}{l} + f(t)\sin\frac{\pi m x}{l},$$

откуда

$$\dot{h} = -a^2 h^2\frac{\pi^2 m^2}{l^2} + f(t).$$

Таким образом, и в случае, когда коэффициент при синусе зависит от t, мы можем естественным образом подобрать решение.

Правда, если $f(t,x)$ не разложима по синусам *a priori*, то чтобы найти $f_i(t)$ нам придется снова применить прием Фурье — умножить $f(t,x)$ на $\sin\frac{\pi m_j x}{l}$:

$$\frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{\pi m_j x}{l}dx = f_j(t).$$

Эта формула навевает мысль, на первый взгляд странную, а на второй — совсем не такую уж и плохую. А что, если умножить на синус и проинтегрировать все уравнение? Тогда мы получим:

$$\underbrace{\frac{2}{l}\int\limits_0^l u_t \sin\frac{\pi m x}{l}dx}_{\dot{u}_m} = \frac{2}{l}a^2\int\limits_0^l u_{xx}\sin\frac{\pi m x}{l}dx + \underbrace{\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t,s)\sin\frac{\pi m x}{l}dx}_{f_m(t)}$$

и, если обозначить

$$\frac{2}{l}\int\limits_0^l u(t,x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx = u_m(t), \tag{9.7}$$

то слева стоит $\dot{u}_m(t)$. Справа второе слагаемое — это то самое $f_m(t)$, а вот с первым мы можем немножко поколдовать. Проинтегрировав его по частям, получим

$$\int\limits_0^l u_{xx}\sin\frac{\pi m x}{l}dx = \int\limits_0^l d(u_x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx = u_x\sin\frac{\pi m x}{l}\Big|_0^l - \frac{\pi m}{l}\int\limits_0^l u_x\cos\frac{\pi m x}{l}dx =$$

$$= -\frac{\pi m}{l}\int\limits_0^l \cos\frac{\pi m x}{l}du = -\frac{\pi m}{l}\cdot u\cdot\cos\frac{\pi m x}{l}\Big|_0^l - \frac{\pi^2 m^2}{l^2}\int\limits_0^l u\sin\frac{\pi m x}{l}dx = -\frac{\pi^2 m^2}{l^2}u_m(t).$$

Таким образом, умножение на синус и интегрирование дало уравнение

$$\dot{u}_m = -\frac{\pi^2 m^2}{l^2}a^2 u_m(t) + f_m(t), \tag{9.8}$$

то есть в точности тот же результат, что и «подстановка». Это чрезвычайно важный момент: выделение из правой части слагаемого и подстановка решения соответствующего вида в уравнение (т. е., в некотором смысле, «внутреннее» по отношению к уравнению действие) дали одинаковый результат! Но «подстановка» требует соответствующих гипотез о виде решения, а умножение и интегрирование — никаких гипотез не требует. Кроме, естественно, одной — на какую функцию умножать, и тут сыграло самую существенную роль то, что после «перебрасывания» производных на эту функцию при интегрировании по частям мы снова получили ту же самую функцию, только с множителем.

Но вернемся к нашему уравнению. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$u_{\text{чн}} = \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,\text{чн}}(t)\sin\frac{\pi m x}{l},$$

где $u_{m,\text{чн}}(t)$ — частное решение уравнения (9.8).

Поскольку общее решение однородного уравнения имеет вид

$$u_{\text{оо}} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\frac{\pi^2 m^2 a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi m x}{l},$$

общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$u_{\text{он}} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m e^{-\frac{\pi^2 m^2 a^2}{l^2}t} + u_{m,\text{чн}}\right)\sin\frac{\pi m x}{l}.$$

Отметим, что в скобках стоит общее решение уравнения (9.8), так что, найдя функции, на которые надо умножать, мы могли уже общее решение однородного и не искать — оно нашлось бы само собой.

Если у нас задано начальное условие $u(0,x) = u_0(x)$, то (9.7) при $t = 0$ даст начальное условие для $u_m(t)$:

$$u_m(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u_0(x)\sin\frac{\pi m x}{l}dx,$$

что позволит найти конкретные функции $u_m(t)$, а по ним и соответствующее решение уравнения теплопроводности.

Если в задаче заданы неоднородные краевые условия

$$u(t,0) = \nu(t),$$
$$u(t,l) = \mu(t),$$

то необходимо избавиться от неоднородности, представив $u(t,x)$ как сумму функций, одна из которых удовлетворяет этим краевым условиям. Тогда для второй функции они будут нулевыми. Например,

$$u(t,x) = v(t,x) + \nu(t)\frac{l-x}{l} + \mu(t)\frac{x}{l}.$$

Тогда $v(t,0) = v(t,l) = 0$, а уравнение примет вид

$$v_t + \dot{\nu}\frac{l-x}{l} + \dot{\mu}\frac{x}{l} = a^2 v_{xx} + 0 + f(t,x).$$

Таким образом, задача сводится к задаче с однородными краевыми условиями

$$v_t = a^2 v_{xx} + \left[f(t,x) - \dot{\nu}\frac{l-x}{l} - \dot{\mu}\frac{x}{l}\right],$$
$$v\big|_{t=0} = u_0(x) - \nu(t)\frac{l-x}{l} - \mu(t)\frac{x}{l},$$
$$v\big|_{x=0} = v\big|_{x=l} = 0.$$

9.5. Уравнение Пуассона как уравнение для стационарного решения динамических уравнений

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x,y,z)$$

и обсудим его связь с уравнениями

$$u_t = a^2\Delta u + f(t,x,y,z) \quad \text{и} \quad u_{tt} = a^2\Delta u + f(t,x,y,z),$$

которые иногда объединяют прилагательным «эволюционные».

Основная мысль состоит в том, что решение уравнения Пуассона можно интерпретировать как стационарное решение уравнения теплопроводности или уравнения колебаний в случае, когда $f(t,x,y,z)$ не зависист от t:

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,y,z),$$
$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,y,z).$$

Решение эволюционных уравнений можно, как и раньше для одномерных уравнений, искать методом разделения переменных: $u(t,x,y,z) = h(t)\,v(x,y,z)$, и подстановка в уравнение теплопроводности или в волновое уравнение дает

$$\dot{h} = a^2\lambda h \quad \text{или} \quad \ddot{h} = a^2\lambda h$$

соответственно, и спектральную задачу $\Delta v = \lambda v$ которая, как правило, рассматривается в области (прямоугольник, шар) с какими-то граничными условиями. В прямоугольнике можно разделить переменные и дальше:

$$v(x,y,z) = a(x)\,b(y)\,c(z),$$

в шаре это требует специальных замен переменных, в более общей области дальнейшее разделение переменных вообще затруднительно. Но в любом случае решение представляется в виде

$$u(t,x,y,z) = \sum_k h_k(t)\,v_k(x,y,z),$$

где $v_k(x,y,z)$ — собственные функции спектральной задачи $\Delta v_k = \lambda_k v_k$.

Подставляя в эволюционное уравнение стационарное решение $u(t,x,y,z) \equiv u(x,y,z)$ (что ликвидирует производные по t) и применяя к нему уже испытанный прием «умножить на собственную функцию и проинтегрировать», получаем

$$\int\limits_\Omega -\Delta u v_k\,d\Omega = \int\limits_\Omega f v_k\,d\Omega.$$

Преобразуя по формуле Остроградского—Гаусса левую часть, получим

$$-\underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \nabla u v_k\,d\Gamma}_{=0} - \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \nabla v_k u\,d\Gamma}_{=0} + \int\limits_\Omega \Delta v_k u\,d\Omega = \int\limits_\Omega f v_k\,d\Omega,$$

откуда, в силу $\Delta v_k = \lambda_k v_k$,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_\Omega f v_k\,d\Omega \cdot v_k}{\lambda_k}.$$

Таким образом, мы получили разложение решения уравнения Пуассона по собственным функциям оператора Лапласа.

9.6. Метод разделения переменных для двумерного уравнения Лапласа

В области $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ рассмотрим уравнение

$$u_t = \Delta u \quad \text{или} \quad u_{tt} = \Delta u.$$

На границе области обычно ставятся краевые условия следующих типов:

условия I рода $u\,|_{\partial\Omega} = 0$ (**задача Дирихле**),

условия II рода $\dfrac{\partial u}{\partial n}\,|_{\partial\Omega} = 0$, где n — нормаль к границе Ω (**задача Неймана**),

условия III рода $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} - ku\right)|_{\partial\Omega} = 0.$

Решение представляется в виде

$$u\,(t,x) = h\,(t)\,v\,(x)\,, \quad x \in \Omega.$$

Подстановка его в уравнение теплопроводности (для волнового уравнения аналогично) приводит к равенству

$$\dot{h}v = h\Delta v,$$

откуда получается спектральная задача

$$\begin{aligned} \Delta v &= \lambda v, \\ v\,|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

с условиями Дирихле (или другими) и уравнение

$$\dot{h} = \lambda h.$$

Дальнейшее разделение переменных уже зависит от типа области.

9.6..1 Разделение переменных в прямоугольнике

Пусть область — прямоугольник, и у нас две пространственных переменные x и y:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x \leqslant \alpha, \\ 0 &\leqslant y \leqslant \beta. \end{aligned}$$

Тогда решение $v = v\,(x,y)$ спектральной задачи ищется в виде произведения

$$v\,(x,y) = a\,(x)\,b\,(y)\,,$$

что приводит к равенству

$$a''\,(x)\,b\,(y) + a\,(x)\,b''\,(y) = \lambda a\,(x)\,b\,(y) \;\Rightarrow\; \frac{a''\,(x)}{a\,(x)} + \frac{b''\,(y)}{b\,(y)} = \lambda.$$

Из этого равенства следует, что и первое, и второе слагаемые в левой части являются константами, т.е.

$$a''\,(x) = \mu a\,(x)\,, \quad b''\,(y) = \kappa b\,(y)\,,$$

и при этом $\lambda = \mu + \kappa$.

Если на границе прямоугольника заданы условия Дирихле

$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=\alpha} = u\,|_{y=0} = u\,|_{y=\beta} = 0,$$

то подстановка $v\,(x,y)$ в эти условия дает

$$a\,(0) = a\,(\alpha) = 0, \quad b\,(0) = b\,(\beta) = 0,$$

и мы получаем для a и для b спектральные задачи, решения которых нам известны:

$$a_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{\alpha},\ \mu_n = \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2},\ b_m(y) = \sin\frac{\pi n y}{\beta},\ \kappa_n = \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2}.$$

Значит (здесь удобно нумеровать двумя индексами: n и m),

$$v_{nm}(x,y) = \sin\frac{\pi n x}{\alpha}\sin\frac{\pi n y}{\beta},\quad \lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}\right),$$

и

$$u(t,x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{\alpha}\sin\frac{\pi n y}{\beta}C_{n,m}e^{-\pi\ \frac{n^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\beta^2}\ t}.$$

9.6..2 Разделение переменных в круге

Сразу отметим, что «сходу» разделить переменные для задачи в круге не удается. То есть можно представить $u(t,x,y) = h(t)\,v(x,y)$ и отщепить уравнение для $h(t)$, но для $v(x,y)$ представление в виде $v(x,y) = a(x)\,b(y)$ неприменимо, так как подстановка этой функции, например, в условие Дирихле на окружности $x^2+y^2=1$ даст $h(t)\,a(x)\,b(y) = 0$, откуда либо $a\equiv 0$, либо $b\equiv 0$. Поэтому нетривиальных решений типа $v(x,y) = a(x)\,b(y)$ не существует. Необходимо перейти к полярным координатам, в которых круг выглядит следующим образом:

$$0 \leqslant r \leqslant R,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

т.е. представляет собой прямоугольник.

То, что в полярных координатах круг оказывается прямоугольником, играет для полного разделения переменных решающую роль: ведь, по большому счету, разделять переменные мы умеем только в прямоугольнике.

Перейдем к полярным координатам и посмотрим, как преобразуется в этих координатах оператор Лапласа Δu. Переход к полярным координатам определяется формулами

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,$$

обратный переход — формулами

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

поэтому в полярных координатах производные имеют следующий вид:

$$u_x = u_r r_x + u_\varphi\varphi_x,$$

где

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r},\quad \varphi_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2},$$

так что

$$u_x = x\left(\frac{1}{r}u_r\right) - y\left(\frac{1}{r^2}u_\varphi\right);$$
$$u_{xx} = \frac{1}{r}u_r + x\left(\frac{1}{r}u_r\right)_r\frac{x}{r} - x\left(\frac{1}{r}u_r\right)_\varphi\frac{y}{r^2} - y\left(\frac{1}{r^2}u_\varphi\right)_r\frac{x}{r} + y\left(\frac{1}{r^2}u_\varphi\right)_\varphi\frac{y}{r^2}.$$

Аналогично

$$u_y = u_r r_y + u_\varphi \varphi_y,$$

где

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}, \quad \varphi_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{x}{r^2},$$

$$u_y = y\left(\frac{1}{r}u_r\right) - x\left(\frac{1}{r^2}u_\varphi\right);$$
$$u_{yy} = \frac{1}{r}u_r + y\left(\frac{1}{r}u_r\right)_r \frac{y}{r} + y\left(\frac{1}{r}u_r\right)_\varphi \frac{x}{r^2} + x\left(\frac{1}{r^2}u_\varphi\right)_r \frac{y}{r} + y\left(\frac{1}{r^2}u_\varphi\right)_\varphi \frac{x}{r^2}.$$

Значит оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{2}{r}u_r + r\left(\frac{1}{r}u_r\right)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = \frac{2}{r}u_r + r\left(-\frac{1}{r^2}u_r + \frac{1}{r}u_{rr}\right) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},$$

и уравнение Лапласа в круге приобретает форму

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad r \in [0,R], \quad \varphi \in [0,2\pi],$$
$$u\,|_{r=R} = g(\varphi).$$

Разделим переменные. Будем искать решение в виде функции: $u(r,\varphi) = v(r)\,q(\varphi)$. Подстановка этой функции в уравнение дает

$$v''q + \frac{1}{r}v'q + \frac{1}{r^2}vq'' = 0,$$

откуда после деления на v и q получаем

$$\frac{v'' + \frac{1}{r}v'}{v} + \frac{1}{r^2}\frac{q''}{q} = 0.$$

Во втором слагаемом зависит q только от φ, поэтому на r^2 лучше умножить, получив

$$r^2\frac{v'' + \frac{1}{r}v'}{v} + \frac{q''}{q} = 0$$

И теперь мы, как и раньше, имеем два слагаемых, зависящих от разных переменных. Это дает нам два уравнения:

$$\begin{cases} q'' = \lambda q, \\ r^2\left(v'' + \dfrac{1}{r}v'\right) = -\lambda v. \end{cases}$$

Специфика круга состоит в том, что $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ — это одна и та же точка, поэтому для функции $q(\varphi)$ должны быть выполнены условия периодичности

$$\begin{cases} q(0) = q(2\pi), \\ q'(0) = q'(2\pi). \end{cases}$$

Эти условия определяют собственные значения:

$$\lambda_n = -n^2,$$
$$q_n = A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi.$$

Второе уравнение при этих значениях λ приобретает вид

$$v'' + \frac{1}{r}v' = \frac{n^2}{r^2}v,$$

или, после умножения на r^2

$$r^2v'' + rv' - n^2v = 0.$$

Это — **уравнение Эйлера** (вида $x^2y'' + xy' - n^2y = 0$). Оно имеет характеристическое уравнение

$$\mu(\mu - 1) + \mu - n^2 = 0, \quad \mu = \pm n,$$

и имеет решение вида

$$y = C_1x^n + C_2x^{-n}.$$

Следовательно,

$$v(r) = C_1r^n + C_2r^{-n}.$$
$$u(r, \varphi) = v(r)\, q(\varphi).$$

Поскольку предполагаем, что решение непрерывно и дифференцируемо в круге (в том числе и в центре, где $r = 0$), то слагаемые C_2r^{-n} мы не рассматриваем[5].

Оба слагаемых рассматриваются в кольце (когда уравнение $\Delta u = 0$ задано в кольце $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$). В этих задачах относительно малого круга рассматривается как бы внешняя задача, а относительно большого — как бы внутренняя.

Но вернемся к нашей задаче. Итак,

$$\lambda_n = -n^2,$$
$$q_n = A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi,$$
$$u_n(r) = C_1r^n.$$

Значит

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi),$$
$$u_0(r, \varphi) = \frac{1}{2}A_0$$

(в случае $\lambda = 0$ единственным периодическим решением уравнения $q'' = 0$ является константа) и

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi) + \frac{1}{2}A_0.$$

Подстановка в граничное условие дает

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi) + \frac{1}{2}A_0 = h(\varphi).$$

[5]Такой «выбор» относится только к данной задаче. Те же самые слагаемые C_2r^{-n} играют ведущую роль во внешних задачах (когда уравнение $\Delta u = 0$ задано вне круга), C_1r^n там не используются, так как предполагается, что на бесконечности $v(r) \to 0$.

Мы снова получили задачу разложения функции $h(\varphi)$ в ряд Фурье. Удобно ввести ее в канонической форме, объединив R^n с коэффициентами A_n, B_n:

$$A_n = \frac{\tilde{A}_n}{R^n}, \quad B_n = \frac{\tilde{B}_n}{R^n}.$$

Тогда

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B} \sin n\varphi\right) + \frac{1}{2}A_0,$$

и

$$u(R,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B} \sin n\varphi\right) + \frac{1}{2}A_0 = g(\varphi).$$

Это уже точное разложение $g(\varphi)$ в ряд Фурье, коэффициенты $\tilde{A}_n$ и $\tilde{B}_n$ определяются формулами:

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \quad \tilde{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.^6$$

Подставляя значения коэффициентов, получаем:

$$\begin{aligned}
&u(r,\varphi) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g(\psi)\,d\psi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\int_0^{2\pi} g(\psi)\cos n\psi d\psi \cos n\varphi + \int_0^{2\pi} g(\psi)\sin n\psi d\psi \sin n\varphi\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\psi\cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi)\right)d\psi = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi-\psi)\right)d\psi.
\end{aligned}$$

Если обратиться к формуле Эйлера ($\cos\varphi = Re(e^{i\varphi})$), можно ряд в скобках представить в виде геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos\varphi) = Re\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in\varphi}\right] = Re\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n\right] =$$

где обозначено $z = \frac{r}{R}e^{i\varphi}$. Условие $|z| < 1$ выполнено, когда $r < R$. При этом условии

[6] Здесь, как и в случае с синусами, основную роль играет то, что интеграл от произведения разных функций равен нулю. Поскольку $\int_\alpha^\beta a(x)\,b(x)\,dx$ можно рассматривать как естественный "континуальный" аналог скалярного произведения векторов $\sum a_i b_i$, обычно говорят, что система функций $\left\{\frac{1}{2}, \cos n\varphi, \sin n\varphi\right\}$ — ортогональная на $[0, 2\pi]$.

геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ сходится, и ее суммирование дает

$$= Re\left[\frac{1}{2} + \frac{z}{1-z}\right] = Re\frac{1+z}{2(1-z)} = Re\frac{1 + \frac{r}{R}\cos\varphi + i\frac{r}{R}\sin\varphi}{2\left(1 - \frac{r}{R}\cos\varphi - i\frac{r}{R}\sin\varphi\right)} =$$
$$= Re\frac{(R + r\cos\varphi + ir\sin\varphi)(R - r\cos\varphi + ir\sin\varphi)}{2\left(R^2 + r^2\cos^2\varphi - 2rR\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)} =$$
$$= Re\frac{R^2 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi + i(...)}{2(R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi)} = \frac{R^2 - r^2}{2(R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi)}.$$

Следовательно,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, g(\psi)}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\varphi - \psi)} d\psi. \tag{9.9}$$

Мы нашли решение задачи Дирихле. Эта формула называется **формулой Пуассона**. Примечательно то, что она явная и конечная, но получена из бесконечного разложения, которое удалось просуммировать.

Формула имеет область действия шире, чем $r < R$. При $r = R$ и $\varphi \neq \psi$ в числителе формулы будет нуль, а в знаменателе не нуль, значит, дробь равна нулю. Если же $\varphi = \psi$, то и в числителе, и в знаменателе формулы Пуассона будет нуль. Но в знаменателе нуль «сильнее», так как при $\varphi = \psi$:

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR} = \frac{(R-r)(R+r)}{(R-r)^2} = \frac{R+r}{R-r}.$$

В пределе получим бесконечность. Таким образом, предел

$$\frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi}$$

при $r \to R$ очень похож на дельта-функцию.

Проверим третье свойство дельта-функции (первые два выполнены):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi} d\varphi = 1.$$

Значит, при $r \to R$ мы получаем

$$u(R,\varphi) = \int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \psi)\, h\psi d\psi = h(\varphi).$$

Эта запись условная, аккуратно же сходимость (9.9) к $h(\varphi)$ доказывается, как в случае уравнения теплопроводности разбиением интеграла на две части: около φ и вне φ и вычислением разности между $u(r,\varphi)$ и $h(\varphi)$.

9.7. Метод разделения переменных для двумерного волнового уравнения

Рассмотрим двумерное волновое уравнение в круге:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy} + f(t,x,y), \\ x^2 + y^2 &\leqslant R^2. \end{aligned}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}.$$

Поскольку мы пользуемся методом разделения переменных, перейдем к полярным координатам. Тогда уравнение примет вид

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi},$$

и решение будем искать в виде

$$u(t,r,\varphi) = h(t)\,v(r)\,q(\varphi).$$

Разделим переменные:

$$h''vq = hv''q + \frac{1}{r}hv'q + \frac{1}{r^2}hvq'' \;\Rightarrow\; \frac{h''}{h} = \frac{v'' + \dfrac{1}{r}v'}{v} + \frac{1}{r^2}\frac{q''}{q}.$$

Как видим, полностью разделить переменные не удается, но частично мы переменные разделили, так как левая часть зависит только от t, а правая часть от t не зависит.

$$h'' = \lambda h, \quad \frac{v'' + \dfrac{1}{r}v'}{v} + \frac{1}{r^2}\frac{q''}{q} = \lambda.$$

Теперь во втором уравнении мы можем продолжить разделение переменных, так как после умножения на r^2переменные снова оказываются «развязанными».

$$r^2\frac{v'' + \dfrac{1}{r}v'}{v} - \lambda r^2 + \frac{q''}{q} = 0.$$

Первые два слагаемых зависят от r, а третье от φ, следовательно, можно свести уравнение к двум:

$$\begin{aligned} q'' &= \mu q, \\ v'' + \frac{1}{r}v' + \left(\frac{\mu}{r^2} - \lambda\right)v &= 0. \end{aligned}$$

Как и в случае уравнения Лапласа, функция $q(\varphi)$, зависящая от угловой переменной, должна удовлетворять условиям периодичности:

$$\begin{cases} q(0) = q(2\pi), \\ q'(0) = q'(2\pi), \end{cases}$$

откуда

$$\mu_n = -n^2, \quad q_n = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

И, соответственно,

$$v'' + \frac{1}{r}v' = \left(\frac{n^2}{r^2} + \lambda\right) v = 0.$$

Заменим $r = \frac{\tilde{r}}{\sqrt{\lambda}}$ и получим уравнение

$$\tilde{v}'' + \frac{1}{\tilde{r}}\tilde{v}'' - \left(\frac{n^2}{\tilde{r}^2} + 1\right) y = 0,$$

которое называется **уравнением Бесселя**. Несмотря на то, что это уравнение играет важную роль в теории уравнений с частными производными, его решения в элементарных функциях не выражаются. Здесь мы знакомимся с новым принципом: если появляется новая функция, которая не выражается в элементарных функциях, но очень важна, то мы просто добавляем ее к списку элементарных функций, максимально подробно изучаем, и далее пользуемся ею наравне с элементарными. Такие «дополнительные» функции получили название **специальных**.

9.8. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя

Мы рассматриваем уравнение уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$$

в круге

$$\Omega : x^2 + y^2 \leqslant R^2$$

с условием

$$u\,|_{\partial\Omega} = 0.$$
$$u\,(t, x, y) = h\,(t)\,w\,(x, y)$$

Первый слой разделения переменных приводит к уравнениям:

$$\ddot{h} = \lambda h, \quad w_{xx} + w_{yy} = \lambda w.$$

Второе уравнение в полярных координатах имеет вид

$$w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi} = \lambda w,$$

и допускает дальнейшее разделение

$$w\,(r, \varphi) = v\,(r)\,q\,(\varphi)\,,$$

дающее уравнение с условиями периодичности

$$\ddot{q} = \mu q, \quad \mu = -n^2,$$

и уравнение

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \left(\frac{\mu}{r^2} - \lambda\right) v = 0,$$

которое, при $\mu = -n^2$ приобретает вид

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \left(\frac{n^2}{r^2} + \lambda \right) v = 0.$$

Делаем замену $\tilde{r} = \sqrt{\lambda} r$, которая приводит к уравнению, которое называется уравнением Бесселя и оказывается очень важным. Оно возникает не только при анализе волновых уравнений в круге, но и при изучении одномерных волновых уравнений (например, при изучении колебаний тяжелой нити и пр.):

$$\tilde{v}_{\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{v}_r - \left(\frac{n^2}{\tilde{r}^2} + \lambda \right) \tilde{v} = 0.$$

Перепишем в более привычной форме:

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} - \left(n^2 + x^2 \right) y = 0.$$

Попробуем хоть как-то описать решение этого уравнения. Самый «лобовой» способ — это использовать то, что коэффициенты уравнения являются степенными функциями, и попытаться найти решение в виде ряда по степеням x. С какой степени начинается ряд мы не знаем, но, предполагая, что коэффициент при этой степени ненулевой, можно вынести x в этой степени и перенумеровать коэффициенты так, что решение будет представлено в виде:

$$y = x^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k, \quad \text{где } y_0 \neq 0.$$

Подставив в уравнение

$$y = x^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha},$$

получим:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha} - 2 (k+\alpha) (k+\alpha-1) + x \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha-1} \cdot (k+\alpha) - \left(n^2 + x^2 \right) \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha} = 0.$$

Поскольку в первой, второй и третьей сумме x под знаком суммы стоит в степени $k+\alpha$, а в четвертой сумме — в степени $k+\alpha+2$, удобно произвести перенумерацию, обозначив $k+2$ через $\tilde{k}$. Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha} (k+\alpha) (k+\alpha-1) + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha} (k+\alpha) - n^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha} - \sum_{\tilde{k}=2}^{\infty} y_{\tilde{k}-2} x^{\tilde{k}+\alpha} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$y_k (k+\alpha) (k+\alpha-1) + y_k (k+\alpha) - n^2 y_k = 0.$$

При $k = 0$ оно приобретает вид:

$$y_0 (0+\alpha) (0+\alpha-1) + y_0 (0+\alpha) - n^2 y_0 = 0,$$

откуда в силу предположения $y_0 \neq 0$, получаем

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0,$$

т.е.

$$\alpha^2=n^2, \quad \alpha=\pm n.$$

Таким образом, ряд начинается со степени $+n$ то есть n. Случай отрицательной степени $\alpha=-n$ мы, как и в случае уравнения Лапласа, не рассматриваем, так как нас интересуют решения, непрерывные и гладкие в начале координат. Итак, мы остановимся на случае $\alpha=n$. Тогда при $k=1$ получаем

$$y_1(1+n)n+y_1(n+1)-y_1n^2=0,$$

т.е.

$$y_1\left((n+1)^2-n^2\right)=0,$$

и, в силу, $\left((n+1)^2-n^2\right)\neq 0$ приходим к

$$y_1=0.$$

При $k \geqslant 2$ мы имеем уже чуть более длинное уравнение:

$$y_k(k+n)(k+n-1)+y_k(k+n)-ny_k^2-y_{k-2}=0,$$

из которого находятся выражения y_k через y_{k-2}:

$$y_k=\frac{y_{k-2}}{j(k+2n)}.$$

Из этой формулы следует, что коэффициенты y_k с нечетными номерами равны нулю (из $y_1=0$ следует $y_3=0$, затем $y_5=0$ и т.д.), а y_k с четными номерами ($k=2p$) равны:

$$y_{2p}=\frac{y_{2p-2}}{2p(2p+2n)}=\frac{y_{2p-2}}{4p(p+n)}.$$

Найдем явные формулы для четных y_k.

$$\begin{aligned}
&y_0=c=const,\\
&y_2=\frac{y_0}{2^2\cdot 1\cdot(n+1)},\\
&y_4=\frac{y_2}{2^2\cdot 2\cdot(n+2)}=\frac{y_0}{2^{2\cdot 2}2!(n+2)(n+1)},\\
&y_6=\frac{y_4}{2^2\cdot 3\cdot(n+3)}=\frac{y_0}{2^{2\cdot 3}3!(n+1)(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

По-видимому, вычислений вполне достаточно, что бы сделать предположение о том, что эта формула доказывается по индукции:

$$y_{2k}=\frac{y_0n!}{2^{2k}k!(n+k)!}.$$

Таким образом, мы получаем для решения представление:

$$y(x) = y_0 x^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! (n+k)!} = y_0 2^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k! (n+k)!}.$$

Обычно y_0 выбирается так, что бы $y_0 2^n n!$ было равно единице. Функция

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k! (n+k)!}$$

называется **модифицированной функцией Бесселя I рода**. К сожалению, нам эта функция не понадобится по той причине, что она не может удовлетворить граничному условию. Ведь для функции $v = I_n\left(\sqrt{\lambda} r\right)$ должно выполняться $v(R) = 0$, , а функция I_n, являясь рядом с положительными членами, нулю равняться не может. Она похожа по свойствам на экспоненту, или даже на гиперболический синус. А нам нужен обычный синус.

Функция Бесселя, аналогичная обычному синусу, возникает, когда $\lambda < 0$. В этом случае замена имеет уже вид $\tilde{r} = \sqrt{-\lambda} r$ и приводит к уравнению Бесселя

$$\tilde{v}_{\tilde{r}\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{v}_r - \left(\frac{n^2}{\tilde{r}^2} - 1\right) \tilde{v} = 0$$

или

$$x^2 \ddot{y} + x\dot{y} + \left(x^2 - n^2\right) y = 0.$$

Решение этого уравнения для $\lambda < 0$ строится точно также, как и для $\lambda > 0$. Единственное отличие состоит в том, что мы получаем соотношение

$$y_k = -\frac{y_{k-2}}{k(k+2n)},$$

и поэтому ряд получается знакочередующийся, как и у синуса. Функция

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k! (n+k)!}$$

называется **функцией Бесселя I рода**, и именно она нам будет нужна. Связь между $J_n(x)$ и $I_n(x)$ простая: если заменить x на ix, то из обычной получим модифицированную функцию Бесселя I рода ($\lambda > 0$), и наоборот. Важным моментом является то, что при больших значениях x функция Бесселя ведет себя почти как синус. «Грубо» это можно увидеть из того, что у уравнения Бесселя, записанного в виде

$$\ddot{y} + \frac{1}{x}\dot{y} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

при больших x второй коэффициент почти нуль, а третий почти единица, так что уравнение Бесселя при больших x — это «почти что» уравнение $\ddot{y} + y = 0$. На самом деле это аккуратно доказывается: что у функции Бесселя расстояние между нулями приближается к π, как у синуса, и этих нулей бесконечное множество.

Таким образом, мы получаем решение при $\lambda < 0$:

$$v(r) = \tilde{v}(\tilde{r}) = J_n(\tilde{r}) = J_n\left(\sqrt{-\lambda} r\right).$$

Поскольку при разделении переменных появляется условие $v\,|_{r=R}=0$, то λ должно быть таким, что бы $J_n\left(\sqrt{-\lambda}r\right)=0$. Обозначим через ξ_m^n нули $J_n(x)$, занумерованные в порядке возрастания. Тогда

$$\sqrt{-\lambda}R=\xi_m^n,\quad \lambda=-\frac{\left(\xi_m^n\right)^2}{R^2}.$$

Соответственно, получаем

$$h_{n,m}(t)=A_{n,m}\cos\frac{\xi_m^n}{R}t+B_{n,m}\sin\frac{\xi_m^n}{R}t,$$
$$u=J_n\left(\sqrt{-\lambda r}\right)(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)\left(A_{n,m}\cos\frac{\xi_m^n}{R}t+B_{n,m}\sin\frac{\xi_m^n}{R}t\right).$$

Для того чтобы произвольные константы друг на друга не умножались, мы попарно перемножим слагаемые в скобках и переобозначим константы. Получим

$$u=J_n\left(\xi_m^n\frac{r}{R}\right)\left(a_{n,m}\cos n\varphi\cos\frac{\xi_m^n t}{R}+b_{n,m}\cos n\varphi\sin\frac{\xi_m^n t}{R}+c_{n,m}\sin n\varphi\cos\frac{\xi_m^n t}{R}+d_{n,m}\sin n\varphi\sin\frac{\xi_m^n t}{R}\right).$$

Это и есть представление решения волнового уравнения в круге.

Отметим, что функция $J_n(x)$ может определяться и для нецелых x, только там факториалы заменяются гамма-функцией. Тогда получается функция Бесселя нецелого порядка:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\,(k+\nu+1)}.$$

Построив ряд, неплохо было бы выяснить его сходимость. Воспользуемся признаком Д'Аламбера:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{\dfrac{1}{2^{2k+\nu+2}(k+1)!\,(k+\nu+2)}}{\dfrac{1}{2^{2k+\nu}k!\,(k+\nu+1)}}=\frac{1}{4(k+1)(K+\nu+1)}\underset{k\to\infty}{\to}0.$$

Значит ряд сходится при всех x и представляет собой аналитическую функцию.

Любопытным оказывается тот факт, что если $\nu=\frac{1}{2}$, то $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$, так что $J_\nu(x)$ не просто аналогичны синусу, но могут считаться его «обобщениями».

Одним из важнейших свойств функции Бесселя является соотношение ортогональности:

$$\int_0^1 J_n\left(\xi_m^n x\right)J_{n'}\left(\xi_{m'}^{n'}x\right)xdx=\begin{cases}0, & n\neq n', m\neq m',\\ \text{не ноль}, & n=n', m=m'.\end{cases}$$

позволяющее для рядов по функциям Бесселя выполнять те же операции, что и для рядов по синусам.

9.9. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в шаре. Сферические функции

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре B_R радиуса R:

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,$$
$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2.$$

Для осуществления разделения переменных нам понадобится перейти в такую систему координат, в которой шар выглядит как параллелепипед. Такой системой координат является сферическая система:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\varphi\sin\zeta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}, \\ \psi = \operatorname{arctg}\frac{z}{y}. \end{cases}$$

В этой системе координат граничное условие приобретает вид

$$u\,|_{\partial B_R} = g\left(\varphi,\psi\right).$$

Посмотрим теперь, как преобразуется уравнение Лапласа при переходе к сферической системе координат.

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r},$$
$$\varphi_x = -\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r^2}, \quad \varphi_y = \frac{xy}{r^2\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \varphi_z = \frac{xz}{r^2\sqrt{y^2+z^2}},$$
$$\psi_x = 0, \quad \psi_y = -\frac{z}{y^2+z^2}, \quad \psi_z = \frac{y}{y^2+z^2}.$$

$$\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\varphi\varphi_x + u_\psi\psi_x, \\
u_y &= u_r r_y + u_\varphi\varphi_y + u_\psi\psi_y, \\
u_z &= u_r r_z + u_\varphi\varphi_z + u_\psi\psi_z; \\
u_{xx} &= u_{rr}r_x^2 + u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + u_{\psi\psi}\psi_x^2 + 2u_{r\varphi}r_x\varphi_x + 2u_{r\psi}r_x\psi_x + 2u_{\varphi\psi}\varphi_x\psi_x + u_r r_{xx} + u_\varphi\varphi_{xx} + u_\psi\psi_{xx}, \\
u_{yy} &= u_{rr}r_y^2 + u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + u_{\psi\psi}\psi_y^2 + 2u_{r\varphi}r_y\varphi_y + 2u_{r\psi}r_y\psi_y + 2u_{\varphi\psi}\varphi_y\psi_y + u_r r_{yy} + u_\varphi\varphi_{yy} + u_\psi\psi_{yy}, \\
u_{zz} &= u_{rr}r_z^2 + u_{\varphi\varphi}\varphi_z^2 + u_{\psi\psi}\psi_z^2 + 2u_{r\varphi}r_z\varphi_z + 2u_{r\psi}r_z\psi_z + 2u_{\varphi\psi}\varphi_z\psi_z + u_r r_{zz} + u_\varphi\varphi_{zz} + u_\psi\psi_{zz}.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}
\Delta u = {} & u_{rr}\left(\nabla r\right)^2 + u_{\varphi\varphi}\left(\nabla\varphi\right)^2 + u_{\psi\psi}\left(\nabla\psi\right)^2 + \\
& + 2u_{r\varphi}\left(\nabla r\nabla\varphi\right) + 2u_{r\psi}\left(\nabla r\nabla\psi\right) + 2u_{\varphi\psi}\left(\nabla\varphi\nabla\psi\right) + u_r\Delta r + u_\varphi\Delta\varphi + u_\psi\Delta\psi,
\end{aligned}$$

Имея формулы

$$\begin{aligned}
r_{xx} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad r_{yy} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \quad r_{zz} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}; \\
\varphi_{xx} &= \frac{2x\sqrt{y^2+z^2}}{r^4}, \\
\varphi_{yy} &= \frac{x}{r^2\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{1}{2}\frac{y^2x^2}{r^2\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^3} - \frac{2y^2x}{r^4\sqrt{y^2+z^2}}, \\
\varphi_{zz} &= \frac{x}{r^2\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{1}{2}\frac{z^2x^2}{r^2\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^3} - \frac{2z^2x}{r^4\sqrt{y^2+z^2}}; \\
\psi_{xx} &= 0, \quad \psi_{yy} = \frac{2zy}{\left(y^2+z^2\right)^2}, \quad \psi_{zz} = -\frac{2zy}{\left(y^2+z^2\right)^2},
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
\Delta r &= \frac{2}{r}, \\
\Delta\varphi &= \frac{x}{r^2\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}, \\
\Delta\psi &= 0, \\
(\nabla r)^2 &= 1, \\
(\nabla\varphi)^2 &= \frac{1}{r^2}, \\
(\nabla\psi)^2 &= \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}, \\
(\nabla r, \nabla\varphi) = (\nabla r, \nabla\psi) &= (\nabla\varphi, \nabla\psi) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, в сферических координатах трехмерный оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}u_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\psi\psi}$$

$$0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

Займемся теперь разделением переменных: представим решение в виде

$$u(r,\varphi,\psi) = v(r)\,h(\varphi,\psi),$$

тогда

$$r^2\frac{v'' + \dfrac{2}{r}v'}{v} + \frac{h_{\varphi\varphi}}{h} + \frac{\cos\varphi h_\varphi}{\sin\varphi h} + \frac{h_{\psi\psi}}{\sin^2\varphi h} = 0,$$

и мы получаем

- $$r^2v'' + 2rv' = \lambda v - \text{уравнение Эйлера},$$
  решения которого имеют вид $v = r^{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}}}$.

- $$h_{\varphi\varphi} + \frac{\cos\varphi h_\varphi}{\sin\varphi} + \frac{h_{\psi\psi}}{\sin^2\varphi} = -\lambda h.$$
  Это уравнение обычно переписывают в более компактной форме:
  $$\frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi h_\varphi)_\varphi + \frac{h_{\psi\psi}}{\sin^2\varphi} = -\lambda h$$
  и называют **уравнением Лапласа—Бельтрами**. Это уравнение, возникшее у нас как «проекция» на поверхности сферы уравнения Лапласа, представляет и самостоятельный интерес как частный случай дифференциальных уравнений на многообра-

зии. Обычно это уравнение сопровождается следующими условиями периодичности:

$$\begin{aligned} h(\varphi,0) &= h(\varphi,2\pi), \\ h_\psi(\varphi,0) &= h_\psi(\varphi,2\pi), \\ h(0,\psi_1) &= h(0,\psi_2), \forall\psi_1,\psi_2, \\ h(0,\psi) &= 0, \\ h(\pi,\psi_1) &= h(\rho,\psi_2), \\ h(\pi,\psi) &= 0. \end{aligned}$$

Решения уравнения Лапласа—Бельтрами называются **сферическими гармониками**, они играют ту же роль на сфере, что синусы и косинусы на окружности.

Для нахождения сферических гармоник можно воспользоваться аналогией с двумерным случаем: там функциям $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ соответствовали решения уравнения Лапласа вида $r^n \sin n\varphi$ и $r^n \cos n\varphi$, являющиеся (если выразить $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$) однородными полиномами степени n. Поэтому мы и в трехмерном случае попробуем найти однородные полиномы, являющиеся решением уравнением Лапласа, а по ним уже определить сферическую функцию.

Однородным полиномом k-й степени от (x,y,z) называется полином, у которого сумма показателей степени равна k.

Будем брать полиномы разных степеней и подставлять в уравнение $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$.

		$u(x,y,z)$	$u(r,\varphi,\psi)$
$k=0$	$\lambda=0$	1	1
$k=1$	$\lambda=2$	x, y, z	$r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\cos\psi,\ r\sin\varphi\cos\psi$
$k=2$	$\lambda=6$	$xy,\ xz,\ yz, x^2-y^2,\ x^2-z^2$	$\cos\varphi\sin\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\varphi\sin\psi, \sin^2\varphi\cos\psi\sin\psi,$ $\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\psi, \cos^2\varphi-\sin^2\varphi\sin^2\psi$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

На этих примерах мы обнаруживаем факт, который на самом деле доказывается строго, но мы этого доказательства проводить не будем: $\lambda_k = k(k+1)$. Тогда, если подставить λ_k в $v(r)$, то получается

$$v = r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}}} = r^k, \quad v = r^{-\frac{1}{2}-\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}}} = r^{-1-k}.$$

Функции, полученные таким образом, называются **сферическими функциями** или **сферическими гармониками** и обозначаются через $Y_k^m(\varphi,\psi)$, где k — номер серии (номер λ_k), а m — номер внутри серии.

Важным свойством сферических функций оказывается и здесь возникающее соотношение ортогональности:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi Y_k^m(\varphi,\psi) Y_{k'}^{m'}(\varphi,\psi)\,d\varphi d\psi = \begin{cases} 0, k\neq k', m\neq m', \\ 1, k=k', m=m', \end{cases}$$

позволяющее решение уравнения Лапласа представить в виде ряда

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k C_{km} Y_k^m(\varphi,\psi)$$

где

$$C_{km} = \int\limits_S g(\varphi, \psi)\, Y_k^m(\varphi, \psi)\, d\varphi d\psi.$$

Наконец, завершая обсуждение сферических функций, отметим, что для волнового уравнения в шаре

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

разделение переменных вида

$$u(t, x, y, z) = p(t)\, v(r)\, g(\varphi, \psi)$$

приводит к

- уравнению

  $$\ddot{p} = -\lambda p$$

  для первого множителя,

- уравнению (приводящемуся к уравнению Бесселя относительно rv)

  $$r^2 v'' + 2rv' + \left(\lambda r^2 - \mu\right) v = 0$$

  для второго,

- и к уравнению Лапласа—Бельтрами

  $$\frac{1}{\sin\varphi} \left(\sin\varphi h_\varphi\right)_\varphi + \frac{h_{\psi\psi}}{\sin^2\psi} = -\mu h$$

  для третьего.

Таким образом, представление решения волнового уравнения в шаре содержит все: и синусы, и функции Бесселя, и сферические гармоники.

Зміст

1. Основные уравнения с частными производными, используемые в математической физике, и основные проблемы, связанные с их решением и исследованием 1
   1.1. Общие соображения 1
   1.2. Проблема обобщенных решений 3
   1.3. Представление решений 7
2. Виды уравнений с частными производными первого порядка 9
   2.1. Простейшие уравнения 9
   2.2. Линейные уравнения 9
      2.2..1 Однородные уравнения с постоянными коэффициентами 9
      2.2..2 Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами 10
      2.2..3 Однородные уравнения с переменными коэффициентами 10
      2.2..4 Неоднородные уравнения с переменными коэффициентами 12
   2.3. Квазилинейные уравнения 12
      2.3..1 Разрывы решений квазилинейных уравнений. Общий подход 14
3. Обобщенные решения уравнений первого порядка 17
4. Характеристики и разрывы решений уравнений первого порядка 22
   4.1. Характеристики и разрывы решений линейных уравнений 22
   4.2. Характеристики и разрывы решений квазилинейных уравнений 23
5. Простейшие уравнения второго порядка 25
6. Одномерное волновое уравнение 26
   6.1. Уравнение струны 26
   6.2. Принцип Дюамеля 29
   6.3. Отражение волн 30
   6.4. Условие свободного конца 32
   6.5. Условия согласования 33
7. Многомерное волновое уравнение 36
   7.1. Формула Грина, формула Гаусса Остроградского 36
   7.2. Уравнение мембраны 37
   7.3. Уравнение электростатического поля (гравитационного поля) 38
   7.4. Многомерное волновое уравнение 40
      7.4..1 Формула Пуассона для трехмерного волнового уравнения 43
      7.4..2 Формула запаздывающих потенциалов 45
      7.4..3 Формула Кирхгофа 46
      7.4..4 Метод спуска. Формула Пуассона для двумерного волнового уравнения 47
   7.5. Задача Коши на наклонной прямой для волнового уравнения 49
   7.6. Задача Гурса 51
8. Уравнение теплопроводности 52

9. Метод Фурье (метод разделения переменных) 58
9.1. Метод Фурье для одномерного волнового уравнения 58
9.2. Метод Фурье для одномерного уравнения теплопроводности 61
9.3. Сходимость ряда Фурье, выражающего решение волнового уравнения 65
9.4. Метод Фурье для неоднородных уравнений и уравнений с ненулевыми краевыми условиями 66
9.5. Уравнение Пуассона как уравнение для стационарного решения динамических уравнений 69
9.6. Метод разделения переменных для двумерного уравнения Лапласа 70
9.6..1 Разделение переменных в прямоугольнике 71
9.6..2 Разделение переменных в круге 72
9.7. Метод разделения переменных для двумерного волнового уравнения 77
9.8. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя 78
9.9. Метод разделения переменных для уравнения Лапласа в шаре. Сферические функции 82