1 Елементи функціонального аналізу

Близкість елементів в $L_2[a,b]$ і збіжність у середині

У просторі L_2 метрика задається умовою $\rho(U,V)=\sqrt{\int_a^b |U(x)-V(x)|^2\,dx}$, тому близкість елементів буде істотно іншою ніж координатна близкість, коли модуль менше ε числа, тоді $|U(x)-V(x)|<\varepsilon$

$$\rho(U,V)=\sqrt{\int_a^b |U(x)-V(x)|^2\,dx}\le\sqrt{\int_a^b \varepsilon^2 dx}=\varepsilon\sqrt{e}=\varepsilon\sqrt{b-a}$$

, але за умови, що <u>*збіжність рівномірна*</u> . Однак з того, що метрика мала неслідує, що $|U(x)-V(x)|$ малий.

ПРИКЛАД 1

$U_x=\begin{cases}10sin(1000\pi x), x\in[0;0.001]\\ 0, x\notin[...]\end{cases}$, $\rho(U,V)=\sqrt{\int_0^{0.001}|U-V|\,dx}=\sqrt{\int_0^{0.001}100sin^2(1000\pi x)dx}=\sqrt{0.05}=0.224$

1.1 Нормовані і Банахові простори

ї Для багатьох застосувань, збіжність у векторному просторі зручніше визначати через норму, яка є узагальненим поняттям довжини вектора у звичайному тривимірному просторі.

Означення: лінійний простір називається нормованим, якщо кожному його елементу ставиться у відповідність дійсне число $\|x\|$ таке, щоб виконувались умови:
1)$\|x\|\ge 0, \|x\|=0\Leftrightarrow x\equiv 0$
2)$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|, \alpha\in\mathbb{C}$
3)$\|x_1+x_2\|\le\|x_1\|+\|x_2\|$- нерівність трикутника.

Вектори лінійного простору з нормою завжди розглядають, як метричні, ця норма $\|x\|=\rho(x;0)$, породжують на множині метрику $\rho(x_1,x_2)=\|x_1-x_2\|$

Властивості
1)$\rho(x,y)\ge 0, \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x\equiv 0$ так як $\|x-y\|$
2)$\rho(x,y)=\rho(y,x), \|x-y\|=|-1|\,\|x-y\|$
3)$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\Leftrightarrow\|x-y\|=\|x-z+z-y\|\le\|x-z\|+\|z-y\|$
Для евклідового простору $\mathbb{R}^n$: $\sqrt{\sum_{i=1}^n}\xi_i^2$
Для простору Лебега : $L_2[a,b]:\|f\|=\sqrt{\int_a^b|f(x)|^2\,dx}$

Збіжність послідновності елементів $\{x_n\}$ у просторі X до деякого елеметна $x_0\in X$ за метрикою називають також збіжністю за нормаю даного простору , позначають : $\rho(x_m,x_0)=\|x_m-x_0\|\underset{n\to\infty}{\to}0$.

У нормованих просторах алгебраїчні операції неперервні. Перекладаючи з метрики на норму маємо:

$$\|(x-x_m)-(y-y_m)\|=\|(x+y)-(x_m+y_m)\|\le\|(x-x_m)\|+\|(y-y_m)\|$$

Якщо $m\to\infty$, $\begin{matrix}x\to x_m\\ y\to x_m\end{matrix}$, то $\lim_{m\to\infty}=(x_m+y_m)=x+y$

Із збіжності за нормою випливає збіжність норми

$$\|x\|=\|x-y+y\|\le\|x-y\|+\|y\|$$

$$\|x\|-\|y\|\le\|x-y\|$$

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$$

Якщо виконується така умова $\|x_n-x_0\|\to 0, n\to\infty$, то $\|x_n\|\to\|x_0\|, n\to\infty$ - то така збіжність називається **сильною**, а повний нормований простір називається **Банаховим**.

Зауваж!Нормований простір завжди метричний, а не метричний не завжди.

Зауваж!Поняття норми аналогічне поняттю поняттю довжини вектора у тривимірному просторі, тому її властивості збігаються з властивостями довжини вектора.

За правилом паралелограма :
$\|U+V\|\le\|U\|+\|V\|$
$\big|\|U-V\|\le\|U-V\|\big|$
$\|U+V\|^2+\|U-V\|^2=2(\|U\|^2+\|V\|^2)$ - нерівність паралелограма .

Тобто норма є відображенням геометричних властивостей , але для повноти нашої картини, треба ввести узагальнення кута між векторами.

1.2 Скалярний добуток

Одним із найповніших способів задання норми у лінійному просторі є введення в ньому скалярного добутку.

Означення: скалярним добутком елементів у лінійно-нормованному просторі X називають комплекснозначну функцію (x_1, x_2), яка задовольняє наступним умовам для кожної пари елементів $x_1, x_2 \in X$.

1) $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$- операція комплексного спряження.

2) $(\alpha x_1 + \beta x_2, x_3) = \alpha(x_1, x_3) + \beta(x_2, x_3)$- властивість лінійності.

3)$(x, x) \geq 0 (x, x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$

Лінійний простір з фіксованим у ньому скалярним добутком називається **евклідовим** . Норма вводиться за допомогою скалярного добутку, наступним чином : $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Означення: повний лінійний нормований простір із скалярним добутком називається **простором Гільберта** . Тоді за означенням скалярного добутку в $\mathbb{R}^n$ вводиться так :

$(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} \xi_i^{(2)}$

$L_2 [a, b] : (f, g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx \rightarrow$-комплексне спряження

Властивості скалярного добутку

1) Якщо два вектори $x_1, x_2 \in H, \alpha \in \mathbb{C},\ (x_1, \alpha x_2) = \tau(x_1, x_2)$

Доведення : $(x_1, \alpha x_2) = \overline{(\alpha x_1, x_2)} = \tau\overline{(x_2, x_1)} = \tau(x_1, x_2)$

2) Зв'язок скалярного добутку з метрикою і нормою :

$(x, x) = \|x\|^2 ; \rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2, x_1 - x_2)}$

3) Для будь-яких векторів $x_1, x_2 \in H$ простору Гільберта справджується властивість Коші-Буняковського, або Мінковського, або Шварца, або Гьольдера: $\|(x_1, x_2)\| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| (1)$

Доведення: розглянемо квадратний тричлен $\varphi(\alpha) = (\alpha x_1 + \alpha x_1, x_2 + x_2) \geq$,де α - довільне.

$\varphi(\alpha) = |\alpha|^2 \|x_1\|^2 + \alpha(x_1, x_2) + \tau(x_2, x_1) + \|x_2\|^2$

$\alpha = -\frac{(x_2, x_1)}{\|x_1\|^2}$, підставляючи саме $\alpha - \frac{|(x_2, x_1)|^2}{\|x_1\|^2} + \|x_2\| \geq 0 \Rightarrow |(x_1, x_2)|^2 \leq \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2$, враховуючи означення модуля і норми отримаємр (1).

А з останньої нерівності прийдемо до висновку, що у просторі Гільберта можна ввести узагальнене поняття кута між векторами гільбертового простору.

$$cos(x_1 \widehat{,} x_2) = \frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\| - \|x_2\|}$$

і нерівність Коші-Буняковського стверджує, що $cos \leq 1$ за абсолютною величиною.

Теорема

Скалярний добуток є неперервною функцією відповідно збігу за нормою даного простору, тобто якщо $\begin{matrix} \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \\ \|y_n - y_0\| \rightarrow 0 \end{matrix}$, коли $n \rightarrow \infty$ це означає, що $\left|(x_n, y_n) - (x_0, y_{0)}\right| \rightarrow 0$

Доведення: $\left|(x_m, y_m) - (x_0, y_{0)})\right| = \left|(x_m, y_m) - (x_m, y_{0)} + (x_m, y_0) - (x_0, y_0)\right| \leq |(x_m, y_m - y_0) + (x_m - x_0, y_0)| \leq \|x_m\| \cdot \|y_m - y_0\| + \|x_m - x_0\| \cdot \|y_0\|$

Так як за умовою теореми усі норми обмежені, повинна виконуватись умова $\lim_{n\rightarrow\infty}(x_m, x) = (\lim_{n\rightarrow\infty} x_m, x)$, тобто норма - неперервна функція.

1.3 Ортогональні системи і ортогональні розвинення

Означення: два елементи гільбертового простору називаються *ортогональними*, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю $(x_1, x_2) = 0$, що позначаэться як $x_1 \perp x_2$

Означення: система елементів $\{x_n\}$ гільбертового простору називається *ортогональною* , якщо всі елементи цієї системи нормовані на одиницю і парами ортогональні

$$(x_i, y_i) = \delta_{ij}, \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Означення: система елементів називається *повною*, якщо в H немає ненульових елементів , ортогональних усім елементам даної системи (Система повна , бо її нічим поповнити).]

Властивості ортогональних елементів

1. Якщо $x_0 \perp x;\ x_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\} \rightarrow$ скінченне ,то він ортогональний і будь-якій комбінації

$$x_0 \perp \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... \alpha_n x_n\}$$

▲ Розглянемо скалярний добуток $(x_0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... \alpha_n x_n) = \tau(x_0, x_1) + ... = 0$ ▽

2. Якщо елементи послідовності $\{x_n\}$ нескінченна ортогональні вектору x, то йому ортогональний і вектор $x_0 = \lim_{n\rightarrow\infty} x_n$, який буде границею послідовності . З неперервності скалярного добутку $\lim(x_n, x) = (x_0, x) = 0$

Для довільних ортогональних $x_1, x_2 \in H$ має місце теорема Піфагора: $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$
Дійсно

$$(x_1 + x_2, x_1 + x_2) = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + (x_1, x_2) + (x_2, x_1)$$

1.4 Ряди Фур'є

Означення: для будь-якого елемента $f \in H$ і ортонормованої системи $\{\varphi_n\}$ з того ж гільбертового простору H формально записаний ряд $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_n \varphi_k$ називається рядом Фур'є , а коефіцієнти $C_k = (f, \varphi_k)$- коефіцієнти Фур'є елементів f за системою $\{\varphi_n\}$

Властивості коефіцієнтів Фур'є

Для кожного елемента $f \in H$ справджується нерівність Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \leq \|H\|^2$$

З неперервності скалярного добутку, розглянемо суму скінченного числа доданків

$$(f - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n, f - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k) \geq 0$$

Це дає змогу використати властивості скалярних добутків:

$$(f - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n, f - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k) = \|f\|^2 - \sum C_k (\varphi_k, f) - \sum \overline{C_k} (f, \varphi_k) + \sum C_k \overline{C_e} (\varphi_k, \varphi_e) = \|f\|^2 - 2 \sum |C_k|^2 + \sum |C_k|^2 = \|f\|^2 - \sum |C_k|^2 \geq$$

$$\sum |C_k|^2 \leq \|f\|^2$$

, що справджується для всіх n . Переходячи до границі , одержимо нерівність Бесселя.

$*$ Нерівність Бесселя стверджує , що всі ряди Фур'є - збіжні , але не обов'язково до елемента, який їх порождую.

Ряд з невід'ємними членами , всі часткові суми якого обмежені зверху величиною $\|f\|^2$

Зауваж! Збіжність рядів Фур'є у середньому!

Приклад :

Нехай є ортонормована система $\{\varphi_k\}$. Побудуємо другу ортонормовану систему $\{\psi_k\}$, при чому $\psi_k = \varphi_{k+1}$ тоді $\varphi_1 \sim \sum C_n \psi_k$, коефіцієнти $C_n = (\varphi_1, \psi_k) = 0$ тобто ряд збігається до 0, хоча побудовано для φ_1

Очевидно, що це є наслідком того, що система $\{\varphi_k\}$ не є повною.

Теорема

Якщо $\{\varphi_k\}$- повна ортогональна система в H, то для будь-якого елемента $f \in H$ має місце розвинення зі знаком рівності

$$f = \sum C_k \varphi_k = \sum (f, \varphi_k) \varphi_k$$

де ряд у правій частині збігається за нормою простору H, при чому справджується рівність Парсеваля — Стєклова

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2$$

▲ Нехай $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k, iS = \lim_{n \to \infty} S_n$

$(f - S_n, \varphi_e) = (f, \varphi_e) - (S_n, \varphi_e) = C_e - (\sum C_k \varphi_k, \varphi_e) = C_e - C_e = 0$, це справджується для всіх $l \leq n$ і всіх n. Але з повноти системи елемент, ортогональний всім $\{\varphi_k\}$ є тільки ненульовий. Тому $f = S = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k$ зі знаком рівності.

Далі: $\|f\|^2 = (f, f) = (\sum C_k \varphi_k \sum C_k \varphi_k) = (\lim \sum C_k \varphi_k, \lim \sum C_k \varphi_k) = \lim \sum |C_k|^2 = \sum |C_k|^2$

Зауваж!

1. Рівність $f = \sum C_k \varphi_k$ означає збіжність у середньому !

2. Система $\{\varphi_k\}$ для якої справджується рівність Парсеваля — Стєклова називається замкненою (тобто для якої ряд Фур'є збігається до функції,для якої побудована)

Поняття замкненої і повної ортогональної системи у $L_2 [a, b]$ збігається.

Теорема

Коефіцієнти ряду Фур'є забезпечують найкращу апроксимацію елемента $f \in H$ скінченним числом ортогональних елементів $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ за методом найменших квадратів.

Нехай $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$- ортонормовані елементи гільбертового простору. Метод найменших квадратів полягає у апроксимації:

$$f \approx \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$$

де коефіцієнти a_i визначаються умовою $\left\| f - \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \right\|^2 = min$

Для того щоб величина

$$F = \int_a^b (f - \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i)^2 dx$$

була найменшою необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0, j = 1, 2, ..., n$$

Диференціювання можна виконати під знаком інтегралу

$$\int_a^b (f - \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i) \varphi_j dx = 0$$

Звідки $a_i = \int_a^b f \varphi_j dx$

Зауваж! Найкраща апроксимація є нормою даного простору $L_2 [a, b]$.

1.5 Інтегрування рядів Фур'є

Відомо, що рівномірно збіжні ряди з неперервних функцій є неперервними функціями і їх можна інтегрувати почленно. Члени рядів Фур'є -неперервні фунцкії , але їх сума може бути розривною функцією. Тому у таких випадках ряд збігається нерівномірно і виникає питання чи можна його почленно інтегрувати.

Теорема

Ряд Фур'є за новою ортонормованою системою можна інтегрувати почленно, не зважаючи на те, чи збігається він поточково, чи ні. При чому почленне інтегрування дає інтеграл від функції , що визначає ряд Фур'є.

Нехай $f(x) \in L_2 [a, b], \{Y_n(x)\}$ -нова ортонормована система в $L_2 [a, b]$.

Треба показати, що

$$\int_c^{\varsigma} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_c^{\varsigma} Y_n(x) dx, a \leq c < \varsigma \leq b$$

Очевидно

$$\left| \int_c^{\varsigma} f(x) dx - \sum_{k=1}^{n} C_k \int_c^{\varsigma} Y_k(x) dx \right| \leq \int_c^{\varsigma} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x) \right| dx \leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x) \right| dx$$

Остаточний вираз розглядаємо як скалярний добуток функції $|f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x)|$ на функцію, що ототожньо дорівнює одиниці.

Тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x) \right| \cdot 1 dx \leq \sqrt{\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x) \right|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b dx}$$

Так як

$$\sqrt{\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x) \right|^2} = \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x) \right\| \to 0, n \to \infty$$

в силу повноти системи $\{Y_k(x)\}$, а $\sqrt{\int_a^b dx} = \sqrt{b-a}$, то

$$\int_c^{\varsigma} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_c^{\varsigma} Y_k(x) dx$$

1.6 Ортогоналізація Грама-Шмідта

Ми мали справу з ортогональним набором елементів гільбертового простору. Але ортогональний набір можна побудувати з будь-якої послідовності незалежних випадків.

Теорема

Скінченну (або зліченну) систему лінійно незалежних функцій $\{\psi_n\}$ завжди можна ортогоналізувати , переходячи до лінійних комбінацій ψ_n, які утворюють ортонормовану систему $\{\varphi_n\}$.

▲ Очевидно, що $\psi_1 \neq 0$, бо лінійно незалежна система не може містити нульового елементу. Покажемо $\varphi_1 = \psi_1$: нормуємо його на одиницю $\widehat{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$. Далі функцію ψ_2 "виправимо"так, щоб вона була ортогональною φ_1:

$$\varphi_2 = \psi_2 - a_{21}\widehat{\varphi}_1, (\varphi_2, \widehat{\varphi}_1) = (\psi_2, \widehat{\varphi}_1) - a_{21} \|\widehat{\varphi}_1\|^2 = 0$$

Звідки $a_{21} = (\psi_2, \widehat{\varphi}_1)$, так як $\|\widehat{\varphi}_1\|^2 = 1$.

Отже,

$$\widehat{\varphi}_2 = \frac{(\psi_2 - (\psi_2, \widehat{\varphi}_1)\widehat{\varphi}_1)}{\|\varphi_2\|}$$

Зрозуміло, що $\|\varphi_2\| \neq 0$, бо у протилежному випадку ψ_1 і ψ_2 були б лінійно залежними , що суперечить умові теореми.

Аналогічно

$$\varphi_n = \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_n, \widehat{\varphi}_k)\widehat{\varphi}_k, \widehat{\varphi}_k = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$$

Якщо $\{\psi_n\}$ скінченна множина , процедура ортогоналізації закінчується на деякому кроці. Якщо множина злічення, то вона продовжується крок за кроком необмежено.

Ця процедура відома з тривіального прикладу:

(ЗОБРАЖЕННЯ)

$$\overrightarrow{\psi}_1 = x\overrightarrow{i}, \widehat{\varphi}_1 = \overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{\psi}_2 - (\overrightarrow{\psi}_2, \widehat{\varphi}_1)\widehat{\varphi}_1 = \overrightarrow{\psi}_2 - (\psi_2)_x \cdot \overrightarrow{i} = y\overrightarrow{j} = \overrightarrow{\varphi}_2$$

$$\frac{\overrightarrow{\varphi}_2}{\|\varphi_2\|} = \overrightarrow{j}$$

Означення:Гільбертів простір $L_2\,[a, b]$ є нескінченновимірним евклідовим простором.

Базисом простору може бути ортонормована система. Покажемо, що повна ортонормована система в $L_2\,[a, b]$ обов'язково нескінченна.

Припустимо, що існує скінченна повна ортонормована система. Тоді будь-який елемент $f \in L_2\,[a, b]$ повинен однозначно бути представленим у вигляді:

$$f = \sum_{i=1}^{k} C_i \varphi i, C_i = (f, \varphi_i), \|f\| = \sqrt{\sum C_i^2}$$

Тому елемент $f \in L_2\,[a, b]$ можна розглядати як n-вимірні вектори в евклідовому просторі. Але кожні $(n+1)$ вектори n-вимірного евклідового простору є лінійно залежними, тому лінійно залежними будуть ш будь-які $(n+1)$ елементи із простору $L_2\,[a, b]$.

Але таке неможливо, бо, наприклад, $1, x, x^2, ...x^{n \neq 1}$- лінійно незалежні , бо для рівності

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_n x^{n \neq 1} = 0$$

виконання виразу може бути тільки за умови

$$C_0 = C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$$

Висновки

Таким чином приходимо до висновку, що одним з принципів функціонального аналізу є такий вибір абстрактного простору і поняття збіжності в ньому , які підходять до даної завжди, тобто такий простір , в якому можна довести необхідні теореми і побудувати правила роботи з цим простором.

У цьому є і перевага. Але простір Лебега $L_2\,[a, b]$ (далі ми розглянемо як його узагальнити на нескінченний інтервал) підходить до задач фізики. І збіжність у середньому ніяк не порушує інтегральні закони фізики. Навпаки , вона дозволяє працювати і з узагальненими розв'язками.

Далі основною задачею буде побудування повного набору ортонормованих функцій,щоб можна було б вводити розвинення в ряд Фур'є.

1.7 Лінійні оператори і функціонали

Нагадаємо, що під функцією розуміють відображення, при якому кожному елементу x із множини X ставиться у відповідність елемент y із множини Y , що записується як $y = f(x)$. При цьому множина X і Y утворена з дійсних обо комплексних чисел.

Якщо множинами X і Y є векторні простори, елементаим яких будуть функції, то кажуть , що таке відображення задається оператором.

Означення: Нехай D і D_1 - два векторні простори. Оператором A називається правило або закон, згідно якому кожній функції f із простору D ставиться у відповідність функціонал g із простору D_1. Тоді говорять, що оператор A діє на функцію f(або оператор A переводить f у g) і записують як $Af = g$.

Оператор вважають визначним, якщо вказано не тільки правило дії оператора, але і клас функцій, який називають областю визначення оператора. Так, для оператора диференційовною $\frac{d}{dx}$ областю визначення , D, буде клас диференційовних функцій . Областю значень буде простір D_1.

Зауваж! в залежності від конкретного вигляду, оператори називають диференціальним, інтегральним і тому подібне.

Як правило, позначають оператори великими літерами. У квантовій механіці-літера з "капелюшком$\widehat{A}$.

Означення: Оператор L , визначений у лінійному просторі D, називається лінійним , якщо для будь-яких $f, g \in D$ і будь-яких $\alpha\beta$ справждується

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$$

Означення:Лінійний оператор A називається обмеженим , якщо існує число $M > 0$ таке, що для кожного $x \in D$ виконується нерівність

$$\|Ax\| \leq M\,\|x\|$$

Найменша з констант M називається нормою лінійного оператора $\|A\|$, тобто

$$\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$$

Означення: Оператор A називається неперервним у точці $f_0 \in D$, якщо $\lim_{f\to f_0} Af = Af_0$ Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що з $\|f - f_0\| < \delta$ слідує $\|Af - Af_0\| < \varepsilon$.

Дії з операторами

1. Додавання $(A + B)f = Af + Bf$
2. Множення на число $(\lambda A)f = \lambda(Af)$
3. Множення операторів $(AB)f = A(Bf)$
4. Оператори рівні $A = B$, якщо $Af = Bf$

Означення: Оператор I називається одиничним , якщо $If = f, \forall f \in D$

Означення:Оператор A^{-1} називається оберненим до A оператора , якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Тобто , якщо $AU = V$, то $U = A^{-1}V$

Зауваж! У загальному випадку

1)$AB \neq BA$

2)$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3)обернений оператор теж лінійний.

1.8 Зведення канонічного вигляду

Лінійні диференційні рівняння 2-го порядку з двома незалежними змінними у загальному випадку мають вигляд:

$$A(x, y)U_{xx} + 2B(x, y)U_{xy} + C(x, y)U_{yy} + F(x, y, U, U_x, U_y)$$

Функції A,B,C задані та визначені у деякій області задання і неперервні та мають похідні до другого порядку включно. Чи можна перетворенням незалежних змінних звести лінійні рівняння до канонічного вигляду в цій області задання ?

В загальному випадку для 2-ох змінних, які незалежні, - це зробити можна завжди. Вводимо дві нові змінні (це довільні неперервні диференційовні функції з якобіаном відмінним від '0').

$$\begin{matrix} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{matrix}, \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, e)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

- це і є необхідні і достатні умови існування оберненого перетворення.

Перетворення

$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x;$
$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y;$
$U_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_{x^2} + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_{x^2} + U_\xi\xi_{xx} + U_\eta\eta_{xx};$
$U_{yy} = U_{\xi\xi}\xi_{y^2} + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_{y^2} + U_\xi\xi_{yy} + U_\eta\eta_{yy};$
$U_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x + \eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy};$
Частіше використовується вигляд:
$a_{11}(x,y)U_{xx} + 2a_{12}(x,y)U_{xy} + a_{22}(x,y)U_{yy} + F(x,y,U,U_x,U_y) = 0$ і якщо замінити похідні $\underline{\Rightarrow \bar{a_{11}}U_{\xi\xi} + 2\bar{a_{12}}U_{\xi\eta} + \bar{a_{22}}U_{\eta\eta} + \bar{F} = 0}$
Беремо такі ξ та $\eta \Rightarrow \bar{a}_{11};$
$a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi x\xi y + a_{22}(\xi_y)^2 = 0$
$a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0$
$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$ Для прикладу можна розглянути рівняння $a_{11}(z_x)^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}(z_y)^2 = 0$
,для якого позв'язок відомий $z = \varphi(x,y)$. Тоді загальний розв'язок $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

Випадки для кореня
1)$\sigma > 0$, рівняння для характеристик має 2 розв'язки :
$\begin{matrix}\varphi_1(x,y) = C \\ \varphi_2(x,y) = C\end{matrix}$ тоді вводимо $\begin{cases}\xi = \varphi_1 \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0 \\ \eta = \varphi_2 \Rightarrow \bar{a}_{12} = 0\end{cases}$ і розв'язком маємо рівняння гіперболічного типу $U_{\xi\eta} + \bar{F}_1(...) = 0$
Якщо $\begin{cases}\alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta\end{cases}$ то $U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} + \bar{F}_1, (...) = 0$
2)$\sigma = 0$ і $\varphi(x,y) = C$, тоді $\begin{cases}\xi = \varphi \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0 \\ \eta = ? \Rightarrow \bar{a}_{12} = 0\end{cases}$ η беремо довільне (або x, або y). Тоді розв'язком маємо рівняння параболічного типу : $U_{\eta\eta} + \bar{F}_2(...) = 0$
3) $\sigma < 0$
$\begin{matrix}Re\varphi(x,y) = \xi \\ \pm Im\varphi(x,y) = \eta\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\bar{a}_{11} = 0 \\ \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}\end{cases}$ і розв'язком маємо рівняння еліптичного типу $U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi} + \bar{F}_3(...) = 0$

Ермітові оператори

Наявність у Гільбертовому просторі скалярного добутку, дозволяє виділити в ньому спеціальний клас лінійних операторів, так званих ермітових (самоспряжені).

Означення : оператор A^+- (це позначення ермітового опретора) називається ермітово-спряженим дор оператора A, якщо для кожних двох функцій $\varphi, \psi \in H$ із множення визначення цього оператора має місце рівність у матричному представлені

$$(A, \varphi, \psi) = (\varphi, A^+\psi) \quad (1)$$

• Оператор A, який співпадає зі своїм ермітово-спряженим оператором A^+ також ермітовий :

$$A^\perp \equiv A^*$$

(ермітове і комплексне спряження)

• Якщо (1), однакові $(A, \varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \to$ симетрія.

• Оператор самоспряжений, якщо лійнійні оператори в рівності $A\psi = A^\perp\psi$ співпадають. **Означення:** оператор перетворення векторів, який зберігає скалярний добуток незмінним, називають унітарним і для нього $A^\perp A = AA^\perp$.

$$(\varphi, \psi) = (A\varphi, A\psi) = (\varphi, A^\perp\psi) \equiv= (\varphi, \psi)$$

Висновок: перехід від одного базису до другого - це поворот у Гільбертовому просторі, яким відповідають унітарні оператори.

Задачі на власні функції і власні значення

Означення: число λ називають власним значенням лінійного оператора, якщо існує деякий вектор $f \in H, f \neq 0, Af = \lambda f$

При цьому f -власний вектор оператора , а λ - власне значення цього оператора.

Множину всіх власних значень називають спектром оператора. Сам спектр склажається із ізольованих точок і називається дискретним.

Якщо точки заповнюють цілком якийсь інтервал, то спектр буде неперервний .

Якщо якомусь власному значенню оператора відповідає декілька власних функцій (векторів), власне значення-вироджене , а число різних лінійних незалежних власних функцій - кратністю виродження.

Властивості власних значень ермітових операторів

1. Власні значення ермітових операторів дійсні

$$(Af,f) = \lambda(f,f) = (f,Af) = \lambda^*(f,f) \to \lambda = \lambda^*, (f,f) = \|f\|^2 > 0$$

2. Власні функції f_1 і f_2 , які відповідають двом різним власним значенням λ_1 і λ_2

$$\begin{matrix} Af_1 = \lambda_1 f_1 \ f_1 \neq 0 \\ Af_2 = \lambda_2 f_2 \ f_2 \neq 0 \end{matrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

ермітового оператора взаємноортогональні

$$(Af_1, f_2) = \lambda_1(f_1, f_2) = (f, Af_2) = \lambda_2^*(f_1, f_2) \Rightarrow (f_1, f_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \Rightarrow (f_!, f_2) = 0$$

3. Для ермітових операторів, так звана квадратична форма $(Af,f) \geq 0$ завжди дійсна.

Означення: оператор додатній, якщо для всіх елементів Гільбертового простору квадратна форма більше або дорівнює нулю.

4. Оператор буде додатнім тоді і тільки тоді, коли всі власні значення невід'ємні - $\lambda_i \geq 0$.

Висновок: для опису фізичних явищ потрібно брати тільки ермітові оператори, тому що їх власні значення невід'ємні. Тільки ермітові оператори дають ортогональний набір у вигляді власних функцій.

Функціонали

Означення: оператор, який відображає свою область визначення у множину дійсних або комплексних чисел називають функціоналом.

Тобто кожному вектору з H ставиться деяке число $F(U)$, де U- елемент Гільбертового простору. Так як функціонал являє собою частковий випадок оператора, всі поняття і результати добуті у попередньому залишаються справедливими для фізики , важливі тільки лінійні функціонали. Ми будемо розглядати функціонали вигляду (AU,V) , де A - любий додатній ермітовий оператор.

Теорема Риса

Будь-який лінійний функціонал FU у H має вигляд $FU = (U,V)$, де $V \in H$ і однозначно визначається елементом U за умови, що норми їх співпадають $\to \|F\| = \|U\|$

За цією теоремою є гарантія існування такого елемента у Гільбертовому просторі, але в зазначеному випадку дуже просто знайти такий елемент за заданим функціоналом.

Нехай

1) $FU = 0, V \equiv= 0 \Rightarrow (U,V) \equiv 0$

2) $Fx = \alpha \neq 0$, виберемо $y = \frac{x}{2}$, а $y \perp \mathbb{N}$ і таким чином, що $Fy = 1, x \in N$

3) Для довільного елемента $U \in H, FU = \beta$ запишемо як $FU = \beta = \beta Fy = F(\beta y)$

$$F(U - \beta y) = 0 \to U - \beta y = z, z \in \mathbb{N} \Rightarrow U = \beta y + z$$

помноживши скалярно на y

$$(U,y) = \beta \|y\|^2, V = \frac{y}{\|y\|}^2 \Rightarrow (U,V) = (U, \frac{y}{\|y\|}^2) = \beta$$

Єдність $FU = (U,V) = (U,\tilde{V})$, це означає $(U, V - \tilde{V}) = 0 \Rightarrow$ справджується для будь-якого вектора.

Якщо вибрати $U = V - \tilde{V}$, то $(V - \tilde{V}, V - \tilde{V}) = \left\| V - \tilde{V} \right\|^2 = 0 \to V \equiv \tilde{V}$

Фізично важливий числовий випадок цієї теореми. Будь-який лінійний функціонал у просторі Лебега має вигляд:

$$f(x) = \int_a^b X(f)y(t)dt, y(t) \in H$$

Теорема про мінімум квадратичного функціоналу

Якщо A - додатній оператор з Гільбертового простору, для якого справджується співвідношення

$$FU = (AU,U) - 2(f,U), AU_0 = f, U_0 \in H, FU \geq FU_0$$

Або через усі елементи Гільбертового простору вибраний функціонал приймає значення на U_0, то розв'язок $AU_0 = f$.

$$FU = (AU,U) - 2(f,U) = (AU,U) - 2(AU_0,U) = (AU,U) - (AU_0,U) - (U,AU_0) = (AU,U) - (AU_0,U) - (AU,U_0) =$$

$$(AU,U) - (AU_0,U) - (AU,U_0) + (AU_0,U_0) - (AU_0,U_0) = (A(U-U_0),(U-U_0)) - (AU_0,U_0), (AU_0,U) = const$$

A-додатній оператор для всіх елементів $U, U - U_0 = 0$

Висновок: якщо справджується диф. рівняння $AU_0 = f$ на елементі U_0, то функціонал FU приймає мінімальне значення на цьому елементі.

Значення теореми в тому, що розв' язання любого рівняння $AU = f$ можна звести до задачі знаходження деякого елемента U_0 , який мінімізує функціонал.

Задача Штурма -Ліувілля

В наукових дослідженнях часто зустрічаються окремі класи задач про власні функції і власні значення диференціальних операторів другого порядку.

$$Ly(x) + \lambda\rho y(x) = 0$$
$$Ly(x) = [k(x)y'(x)] - fy(x), \lambda = const$$

Всі фунцкії $k(x), \rho(x) > 0$, функція $f(x) \geq 0$ і всі ці три функції неперервні, дійсні і двічі диференційовні на заданому відрізку. Цей клас отримав назву Штурма-Ліувілля.

Теорема:

Будь-яке диф. рівняння другого порядку завжди можна привести до самоспряженого виду

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y + \lambda a_3y \ \Big| \cdot A(x)$$

$$Aa_1 = (Aa_0)' = A'a_0 + Aa_0'$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{a_1, a_0'}{a_0} \rightarrow A = exp\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)}dx$$

$$fa_0 = k(x), Aa_2 = -q, Aa_3 = \rho$$

Умова самоспряжності Штурма -Ліувілля

$$L = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right] - q(x)$$

$$(Ly_1, y_2) = \int_a^b \{k(x)y_1' - qy_1\}\, y_2dx = ky_1', y_2 \ \Big|_a^b - \int_a^b ky_1'y_2dx - \int_a^b qy_1y_2dx = k(ky_1', y_2 - ky_1', y_2' \ \Big|_a^b + \int_a^b \{(ky_2') - qy_2\}\, y_1dx$$

$$(Ly_1, y_2) = (y_1, Ly_2) + k(y_1, y_2 + y_1, y_2) \ \Big|_a^b$$

- це можливо, якщо виконується три умови:

1)$(...) \ \Big|^b = (...) \ \Big|_a = 0$

2)$k(a) = k(b), y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$

3)$k(a) = k(b) = 0$

Означення: задача про відшукання нетривіальних розв'язків рівняння $Ly + \lambda\rho\, y = 0$ Штурма-Ліувілля і відповідних їм значень параметра λ називається :

1)Регулярною задачею Штурма -Ліувілля , якщо справджуються крайові умови:

$\Gamma_1 y = \alpha y'(a) + \beta y(a) = 0$

$\Gamma_2 y = \alpha y'(b) + \beta y(b) = 0$

2) Задачею з умовою періодичності: $k(a) = k(b); y(a) = y(b); y'(a) = y'(b)$

3) Скалярною задачею: $k(a) = 0, k(b) = 0$, або інтервал , де розв'язки нескінченні.

Для крайових умов розрізняють чотири типи задач:

$$I : y(a) = y(b) = 0$$
$$II : y'(a) = y'(b) = 0$$
$$\begin{cases} III : y'(a) - h_1y(a) = 0 \\ IV : y'(b) - h_2y(b) = 0 \end{cases}$$

Влатсивості регулярної задачі Штурма -Ліувілля

1. Власні функкії регулярної задачі Штурма -Ліувілля, що відповідають різним власним значенням, ортогональні з вагою ρ на інтервалі $[a, b]$:

$$\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0, m \neq n$$

2. Всі власні значення дійсні.

3.Власні значення утворюють не більше ніж зліченну множину без точок скупчення на комплексній площині λ . (Тобто спектр дискретний).

Запишемо рівняння Штурма -Ліувілля як

$$y'' + \frac{k'}{k}y' - \frac{a}{k}y + \lambda\frac{\rho}{k}y = 0$$

$k \neq 0$, тому коефіцієнти рівняння -неперервні функції. Тобто загальний розв'язок

$$y(\lambda, x) = C_1 y_1(\lambda, x) + C_2 y_2(\lambda, x)$$

є регулярною функцією параметру λ.

Підставляючи в крайові умови (нехай це буде перша крайова задача)

$$\begin{cases} C_1 y_1(a\lambda) + C_2 y_2(a, \lambda) = 0 \\ C_1 y_1(b\lambda) + C_2 y_2(b, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Приходимо до висновку , що нетривіальним розв'язком відносно C_1 і C_2 відповідають умови

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(a\lambda) & y_2(a, \lambda) \\ y_1(b\lambda) & y_2(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Таким чином можливі значення λ будуть нулями функції $\triangle(\lambda)$. Але нулі регулярної функції утворюють не більше ніж значну множину, яка має точкою скупчення тільки $\lambda = \infty$.

Таким чином - спектр дискретний.

4. Власні значення регулярної задачі Штурма - Ліувілля прості , тобто кожному λ відповідають тільки одна власна функція.

Нехай знайдемо фундаментальну систему для рівняння Штурма -Ліувілля -y_1, y_2, тоді з крайових умов

$$\begin{cases} \alpha y_1(a, \lambda) + \beta y_1'(\alpha, \lambda) = 0 \\ \alpha y_2(a, \lambda) + \beta y_2'(\alpha, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Для нетривіального розв'язку цієї системи відносно α і β маємо

$$\begin{vmatrix} \alpha y_1(a, \lambda) & \beta y_1'(\alpha, \lambda) \\ \alpha y_2(a, \lambda) & \beta y_2'(\alpha, \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

А це визначник Вронського і його рівність нулю говорить про лінійну залежність.

Зауваження: Усі властивості задачі з умовами периодичності, крім цієї співпадають з властивостями регулярної задачі.

Для задачі з умовами періодичності

$$y_1(a) = y_1(b), \quad y_1'(a) = y_1'(b)$$

$$C_1 y_1(a, \lambda) + C_2 y_2(a, \lambda) = C_1 y_1(b, \lambda) + C_2 y_2(b, \lambda)$$

$$C_1(y_1(a) - y_1(b)) + C_2(y_2(a) - y_2(b)) = 0$$

$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$, що виконуються для будь-яких C_1 і C_2.

5. Якщо крайові умови задачі Штурма-Ліувілля задовольняють умові

$$k(x)y(x)y'(x) \ \Big|_{x=a}^{x=b} \leq 0,$$

то усі власні значення є невід'ємними

Для I і II крайових задач ця умова справджується.

Перевіримо, чи справджується вона для IV крайової задачі

$$y'(a) - h_1 y(a) = 0, \ y'(b) + h_2 y(b) = 0$$

$$k(x)yy' \ \Big|_a^b = -k(b)y(b)h_2 y(b) - k(a)y(a)h_1 y(a) \leq 0$$

так як $k > 0, h > 0, y^2 > 0$.

$$Ly_n + \lambda_n \rho y_n = 0$$

$$\int_a^b y_n(ky_n')' dx + \lambda_n \int_a^b \rho y_n^2 dx - \int_a^b q y_n^2 dx = k y_n' y_n \ \Big|_a^b - \int_a^b k(y_n'^2) dx - \int_a^b q y_n^2 dx + \lambda_n y_n^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n \geq 0$$

Для того, щоб $\lambda_n = 0$ необхідно: $q = 0, ky_n' y_n \ \Big|_a^b = 0, y_n' = 0$

Тобто $\lambda = 0$ може бути тільки для II крайової умови.

6. Так як опрератор L_1 ермітів , а $\lambda \geq 0$, то цей оператор Штурма-Ліувілля є додатним і можна задачц про власні функції і власні значення звести до варіаційної задачі.

Задача Штурма-Ліувілля може бути зведена до варіаційної задачі про відшукання мінімуму функціонала.

Простір Лебега з вагою

Ми розглядали задачу про власні функції і власні значення типу

$$L_1 y = \lambda y$$

а зараз маємо рівняння $Ly + \lambda \rho y = 0$

Для того, щоб i оператор L_1 був ермітів уводять простір $L_{2,\rho}\left[a, b\right]$ - простір Лебега з вагою.

Якщо покласти $L_1 = -\frac{1}{\rho} L$, де L -ермітів оператор, то щоб був ермітів , модифікують скалярний добуток

$$\|f\|^2 = \int_a^b \rho f^2(x) dx, \ (f, g) = \int_a^b \rho f g dx$$

Тобто приходять від функції f і g до функцій $\sqrt{\rho} f$ і $\sqrt{s} g$ у просторі $L_2\left[a, b\right]$.

Тоді у просторі $L_{2,\rho}\left[a, b\right]$ будуть дійсні функції квадратично інтегровні на інтервалі $[a, b]$ з вагою. Про умову ортогональності теж кажуть , що ортогональність з вагою $\rho(x)$.

Ортогональність

$$y_2(Ly_1 + \lambda_1 \rho y_1 = 0)$$

$$y_1(Ly_2 + \lambda_2 \rho y_2 = 0)$$

$$\int (y_2 L y_1 + y_1 L y_2) dx = (\lambda_1 - \lambda_2) \int \rho y_1 y_2 dx$$