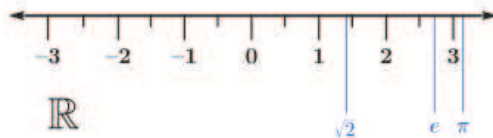


*ЛЕКЦІЇ
З МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ
ФІЗИКИ*

1. Комплексні числа

Раніш вважали, що для функції достатньо, щоб вона мала у всій області один, і той самий, вираз. Але цього замало. Наприклад $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ нескінченно диференційовна у всіх точках числової вісі.



Але її ряд Тейлора¹ $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots$ перестає бути збіжним при $|x| \geq 1$. Причину цьому неможливо зрозуміти, якщо оставатися тільки в дійсній області. Вихід в комплексну область роз'яснює це явище: на колі $|x| = 1$ маємо $x = \pm\sqrt{-1}$, в яких $f(x) = \infty$. Внаслідок чого ряд і перестає збігатися.

Чому саме комплексні числа? Теорема **Фробеніуса**² говорить, що це єдина можливість розширення поля дійсних чисел із збереженням алгебраїчних властивостей і побудови аналізу.

1.1. Система узагальнень

1. При додаванні двох цілих додатних чисел отримують ціле додатне число (і ми не виходимо за межі натурального ряду).
2. Обернена дія — віднімання потребує додати до натурального ряду нуля і від'ємних чисел.
3. Ділення потребує додання дробових чисел.
4. Сукупність раціональних чисел (цілих, дробових) замкнута відносно операцій (+, -, *, :), так як ми отримуємо число з тій же сукупності. Але операція добування кореня потребує введення ще дійсних, але не раціональних (ірраціональних) чисел, таких як $(\sqrt{2})$. А також числа типу $\sqrt{-1}$.

Але узагальнення повинно проводити таким чином, щоб чотири арифметичні дії давали однозначний результат і для комплексних чисел.

Іншими словами: *система комплексних чисел утворює поле.*

Комплексним числом називається число виду $z = x + iy$, де x та y — дійсні числа, i — **уявна одиниця**, яка задовольняє рівність $i^2 = -1$.

Числа x та y називаються дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначаються $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Якщо $y = 0$, то $z = x + i0 = x$ — дійсне, якщо $y \neq 0$, то $z = x + iy$ — число комплексне, при $x = 0$, то $z = iy$ — число суто уявне.

Таким чином комплексне число зображує два дійсних числа.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються рівними, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексне число дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ і $y = 0$.

¹Brook Taylor, 1685–1731

²Ferdinand Georg Frobenius, 1849-1917

1.2. Прямі операції

Сумою $z_1 + z_2$ двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Добутком $z_1 \cdot z_2$ двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Для комплексних чисел справедливі закони:

- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ — асоціативний закон додавання;
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — комутативний закон додавання;
- $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ — асоціативний закон множення;
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$ — комутативний закон множення;
- $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ — дистрибутивний закон множення відносно додавання.

Число $\bar{z} = x - iy$ називається **спряженим відносно** z . Важливість $\bar{z}$ в тому, що $z\bar{z} = x^2 + y^2$ — дійсне число.

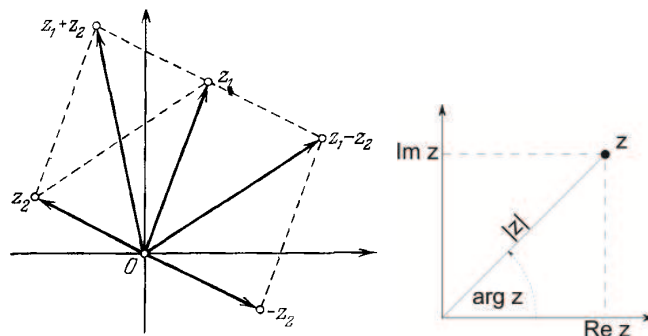
$$\overline{(\bar{z})} = z, \quad z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Різницею $z_1 - z_2$ двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число z , що є розв'язком рівняння $z_1 = z + z_2$. Такий розв'язок існує, він єдиний і дорівнює числу $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Часткою $\frac{z_1}{z_2}$ двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число z , що є розв'язком рівняння $z_1 = z z_2$. Цей розв'язок існує, він єдиний і дорівнює числу

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

при цьому $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$!



1.3. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Якщо кожному комплексному числу $z = x + iy$ поставити у відповідність точку (x, y) на площині, то між множиною всіх комплексних чисел і множиною точок площини буде встановлено взаємно однозначну відповідність.

Дійсна і уявна частини числа z будуть компонентами зображувального вектора, проведеного з початку координат $(0, 0)$ в точку (x, y) . Довжина цього вектора дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$,

який називається **модулем комплексного числа** $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$ (і береться арифметичне значення), а кут φ , на який треба повернути навколо початку додатну частину дійсної осі до збігу з цим вектором, називається **аргументом числа** z і позначається $\varphi = \text{Arg } z$.

Модуль

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad |z| = |\bar{z}|. \quad |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \dots \cdot |z_n|^2.$$

$$\text{Так як } |z|^2 = x^2 + y^2, \quad -|z| \leq \text{Re } z \leq |z|, \quad -|z| \leq \text{Im } z \leq |z|.$$

Нерівність трикутника

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \text{Re } z_1 \bar{z}_2,$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \text{Re } z_1 \bar{z}_2,$$

де $\text{Re } z_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{(z_1 \bar{z}_2)} \leq |z_1| |z_2|$. Звідси

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|.$$

$$|z_1 - (-z_2)| \geq |z_1| - |z_2| \Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

З рівності $|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ робимо висновок: *модуль різниці двох комплексних чисел дорівнює відстані між точками, що відповідають цим числам.*

У зв'язку з цим рівняння кола радіуса r з центром у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ матиме вигляд $|z - z_0| = r$.

Аргумент

$$\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Кут вважається додатним, якщо обертання додатної частини дійсної осі навколо початку відбувається проти годинникової стрілки, і від'ємним, якщо це обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

Головне значення аргументу: $\arg z$.

$$x = r \cos \varphi = |z| \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = |z| \sin \varphi, \quad \arg z = \arctg \frac{y}{x},$$

але головне значення аргументу $-\pi \leq \arg z \leq \pi$, в той час як головне значення арктангенса $-\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2}$ (різна періодичність!)³. Тому:

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2\pi k, & \text{для I та IV квадранту;} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi + 2\pi k, & \text{для II та III квадранту.} \end{cases}$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z.$$

³ $-\frac{\pi}{2} < \arctg x \leq \frac{\pi}{2}$ Чому? $\varphi = \pi - \alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а ця точка знаходиться на першому риманову листі. З цього витікає, що $x = -\frac{\pi}{2}$ відноситься до першого риманового листа. В той же час $\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, що відповідає куту $-\frac{\pi}{2}$ на другому риманову листі. Таким чином, $\frac{\pi}{2}$ входить до інтервалу на першому риманову листі, $\frac{3\pi}{2}$ — в інтервалі на другому і так далі...

Тригонометрична форма числа

$$z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z).$$

Тоді

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| \{ (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \} = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k.$$

Якщо $z_1 = z_2 = \dots = z$, то отримуємо формулу **Муавра**⁴:

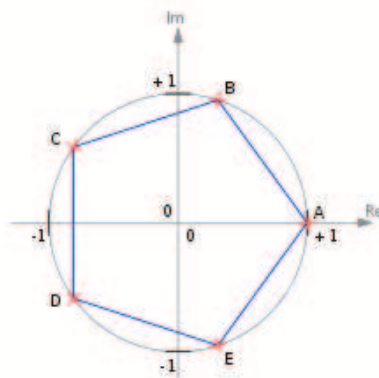
$$z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z).$$

Коренем n -ого степеня з комплексного числа z називається комплексне число, яке є розв'язком рівняння $\omega^n = z$, тоді $\omega = \sqrt[n]{z}$.

Такий розв'язок існує

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Геометрично ці n значень зображуються вершинами правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ з центром в початку.



Зауваження! $\sqrt[n]{z^n} \neq (\sqrt[n]{z})^n$. $\sqrt[n]{z^m} = z^{m/n}$, де m/n — нескоротний дріб.

⁴Abraham de Moivre, 1667-1754

2. Елементарні функції

2.1. Обернені тригонометричні та обернені гіперболічні функції

Функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ визначаються як **обернені** до функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, відповідно. Всі ці функції є багатозначними і виражаються через логарифмічну.

$\sin w = z$. Маємо рівняння $z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{2iw} - 2ie^{iw}z - 1 = 0 \Rightarrow e^{iw} = iz \pm \sqrt{-z^2 + 1} \Rightarrow \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$.

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}), \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

Обернені функції, що відповідають головному значенню логарифма, позначаються тими ж символами з малої літери ($\operatorname{arcsin} z$, $\operatorname{arccos} z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$) і називаються **головними значеннями**.

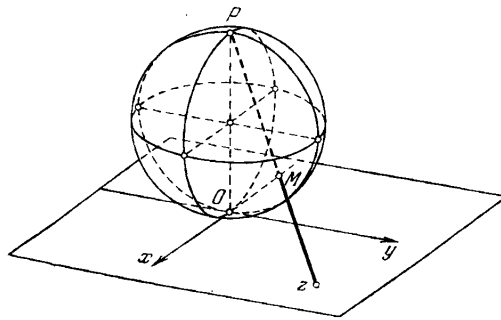
Обернені гіперболічні функції $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ і $\operatorname{Arcth} z$ називаються ареасінусом, ареакосінусом, ареатангенсом та ареакотангенсом і знаходяться за формулами:

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right), \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right).$$

2.2. Інтерпретація комплексних чисел за Ріманом

Стереографічна проекція встановлює відповідність між точками сфери (**сфера Рімана**⁵) з виколотим північним полюсом та множиною всіх точок z комплексної площини.



До власних, скінчених, комплексних чисел $\mathbb{C}$ додається тепер невласне (нескінченне) комплексне число, яке позначається ∞ і називається **нескінченною** або **нескінчено віддаленою** точкою. $\overline{\mathbb{C}}$ — розширення комплексної площини $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Для нескінченності поняття дійсної, уявної частини і аргументу не вводиться. Не має тоді визначеності операції $z + \infty$, $z \cdot \infty$, $\infty + \infty$. Але застосовують цей символ в записах:

$$(-\infty; \infty) — \text{дійсна вісь}, \quad (-i\infty; i\infty) — \text{уявна вісь},$$

$$(\alpha - i\infty; \alpha + i\infty) — \text{пряма } \operatorname{Re} z = \alpha, \quad (\beta i - \infty; \beta i + \infty) — \text{пряма } \operatorname{Im} z = \beta.$$

⁵Georg-Friedrich-Bernhard Riemann, 1826-1866

2.3. Однозначні вітки багатозначних функцій. Ріманова поверхня

Функції $\sqrt[n]{z}$ і $\operatorname{Ln} z$ є багатозначними. Але їх можна представити як сукупність однозначних функцій. Для цього треба знайти точки **розгалудження**.

Якщо після повного обходу кола з центром в якійсь точці ми прийдемо до вихідного положення в якому функція прийме інше значення, то ця точка буде **ізольованою точкою розгалудження**.

Для логарифму точками розгалудження будуть 0 і ∞ (нескінченність теж, бо повний обхід цієї точки буде еквівалентний обходу початку по колу великого радіусу). $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)$ (γ_1). Після повного обходу $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi + 2\pi k)$ (γ_2).

Теж саме маємо і для корня. Якщо провести розріз між 0 і ∞ ми прийдемо до однозначної функції (однієї вітки кореня або логарифму). Після повного обходу ми просто не повернемося у вихідне положення (ми натикаємося на берег розрізу).

Для кореня:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{2} + i \sin \frac{\arg z}{2} \right) \\ w_2 &= \sqrt{|z|} \left(\cos \left(\frac{\arg z}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\arg z}{2} + \pi \right) \right). \end{aligned}$$

Тобто $w_2 = -w_1$, Після повного обходу точки $z = 0$ ми переходимо на другий листок, зробили повний оберт і повернулися на перший⁶.

А у логарифма нескінченна кількість віток. Кожну вітку беруть на новому листку. Ці листки складають **риманову поверхню**. Іноді простіше працювати не з нескінченною кількістю листків, а з поверхнею, яка утворена їх склеюванням. Верхній берег нижнього листка склеюють з нижнім берегом попереднього листка.

Точки розгалудження бувають кореневого і логарифмічного типів (для логарифма і кореня багатозначність має різний характер):

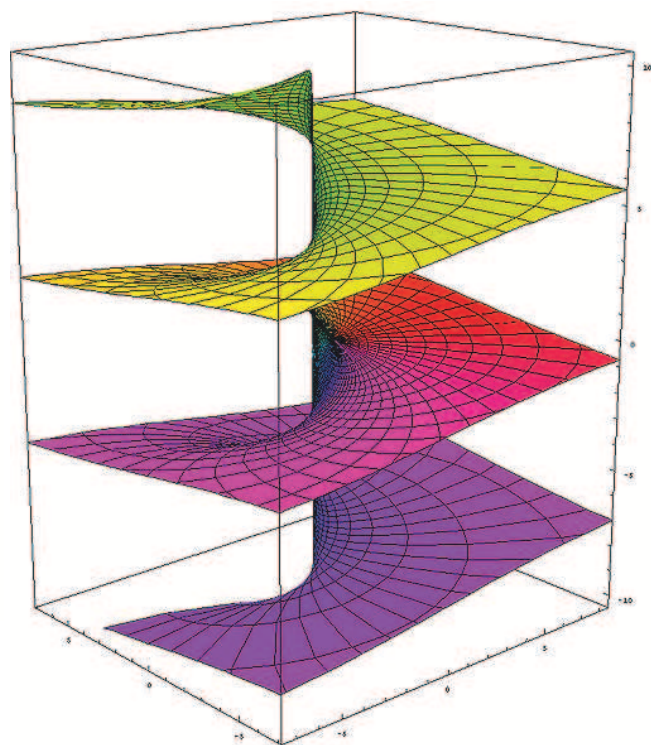
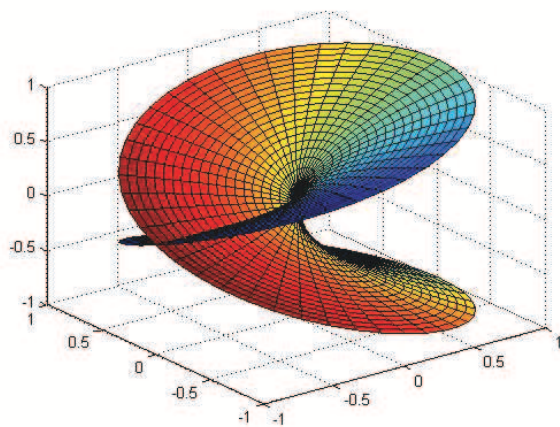
- для логарифму після обходу початку маємо (**адитивний характер**):

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z \ (\mathbb{k} = 0) \Rightarrow \ln |z| + i \arg z + i(2\pi) \ (\mathbb{k} = 1) \Rightarrow \operatorname{Ln} z + 2\pi i;$$

- для кореня $\sqrt[n]{z}$, $z = e^{i\varphi}$ (**мультиплікативний характер**):

$$\sqrt[n]{z} = e^{i\varphi/n} \Rightarrow e^{i(\varphi+2\pi)/n} = e^{i\varphi/n} \cdot e^{2\pi i/n} = \sqrt[n]{z} \cdot e^{2\pi i/n}.$$

⁶Для $\sqrt{z^2}$ риманова поверхня взагалі розпадається на 2 різних листа z і $-z$.



3. Границя функції

Число A називається **границею функції**⁷ в точці z_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $z \in E$ ($z \neq z_0$), що містяться в δ -околі точки z_0 і відмінні від z_0 , точки $\omega = f(z)$ потрапляють у ε -оکیل точки A :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall z \neq z_0 \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Відзнака від дійсного аналізу — існування границі при будь-якому підході до z_0 !

Зауваження: існування границі при довільному напрямку підходу пн не гарантує існування границі! $(f(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right))$. При $z \rightarrow 0$ вздовж якогось променя $f_\varphi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}} \right) = \sin 2\varphi$. Ці границі заповнюють відрізок $[-1, 1]$, але загальної границі не існує.)

3.1. Неперервність функції

Якщо точка $z = a \in E$ є точкою, в якій існує границя функції, яка дорівнює $f(a)$, то функція в цій точці **неперервна**. Функція **неперервна на множині**, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Функція **рівномірно**⁸ **неперервна на множині**, якщо виконується умова

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z' \in E \quad \forall z'' \in E \quad |z' - z''| < \delta \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Теорема 3.1 *Неперервність функції $f(z)$ комплексної змінної в точці $z = x + iy$ еквівалентна неперервності її компонент: двох дійсних функцій $U(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ і $V(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ від двох дійсних змінних.*

Цим обґрунтовується положення про те, що найпростіші властивості границь функцій дійсної змінної поширюються на функції комплексної змінної.

3.2. Диференційовність функції

Функція називається **диференційовною (моногенною)** в точці z , якщо при прагненні до нуля $\Delta z \rightarrow 0$ (вздовж будь-якого шляху) існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = A = f'(z),$$

⁷Граничне наближення $f(x) \rightarrow A$ значення функції до певної границі — це поступове попадання значення $f(x)$ до як завгодно малого околу точки a . Проколотість околу ($z = z_0$) при $z \rightarrow z_0$ істотна, оскільки $f(x)$ може бути невизначеною в точці z_0 , наприклад $\frac{1}{z}$ при $z \rightarrow 0$.

⁸Звичайна неперервність означає, що $\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon): \forall x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Рівномірна неперервність відрізняється тим, що δ може вибрати незалежним від x_0 , тобто однією і тією ж в будь-якій частині множини X .

$\frac{1}{x}$ не є неперервною на $[0; 1]$. Нехай $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1}{n+1}$, тоді $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1$, в той час як величина $|x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{n(n+1)} \right|$ може бути як завгодно малою при відповідних n .

яка називається **похідною**. З означення границі: $\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - A \right| < \varepsilon \Rightarrow \Delta f = f' \Delta z + \varepsilon \Delta z$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$). $\varepsilon \Delta z = o(\Delta z) \Rightarrow \frac{\varepsilon \Delta z}{\Delta z} \rightarrow 0$. Це є необхідною і достатньою умовою диференційовності. Звідси випливає, що функція диференційовна в точці, є неперервною у цій точці.

Теорема 3..2 Для того, щоб функція $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, була диференційовною в точці $z = x + iy$, необхідно і достатньо⁹, щоб

1. функції U і V були диференційовними як функції двох дійсних змінних;
2. виконувалися в точці (x, y) умови **Коші**¹⁰-**Рімана** (**Даламбера**¹¹-**Ейлера**)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Доведення.

Необхідність. Нехай точка наближається вздовж дійсної і уявної осі:
 $\Delta z = \Delta x$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} + i \frac{V(x + \Delta x, y) - V(x, y)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x}.$$

$\Delta z = \Delta y$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{U(x, y + \Delta y) - U(x, y)}{i \Delta y} + i \frac{V(x, y + \Delta y) - V(x, y)}{i \Delta y} \right) = -i \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = -i \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Достатність. За означенням диференційовності функцій U і V , застосовуючи умови Коші-Рімана:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \\ \Delta V &= \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U + i \Delta V.$$

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta U + i \Delta V &= \frac{\partial U}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial V}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \dots = \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} \right)}_{f'(z_0)} \Delta z + \varepsilon \Delta z, \\ \varepsilon \Delta z &= \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + i \varepsilon_3 \Delta x + i \varepsilon_4 \Delta y = (\varepsilon_1 + i \varepsilon_3) \Delta x + (\varepsilon_2 + i \varepsilon_4) \Delta y, \\ &|\Delta x| \leq |\Delta z|. \end{aligned}$$

⁹Необхідні і достатні умови — умови справедливості твердження A , без виконання яких твердження A заздалегідь не може бути вірним («тоді і тільки тоді»). Достатні умови роблять якомога більш ширшими, щоб охопити більшу кількість випадків, а необхідні — якомога вузьшими, щоб охопити менше зайвих випадків. Таким чином, достатні умови поступово наближаються до необхідних.

¹⁰Augustin Louis Cauchy, 1789-1857

¹¹Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783

Різні форми диференціалу.

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial x}.$$

$$\underbrace{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \quad dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}).}_{\Downarrow}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad df = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Більша обмеженість умов диференційовності. Якщо в дійсному аналізі важко знайти приклади функцій ніде не диференційовних, то для комплексного аналізу — це звичайні функції, наприклад,

$$f(z) = x + 2iy \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial U}{\partial x} \neq \frac{\partial V}{\partial y}.$$

$$f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z \Rightarrow \text{диференційовність тільки при } z = 0.$$

Зауваження: дійсна та уявна частини моногенної функції не є незалежними! Якщо відома дійсна частина, то можна відновити уявну і навпаки.

З умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \right) \pm \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Таким чином уявна і дійсна частини підкоряються рівнянню **Лапласа**¹², розв'язком якого є **гармонічні** функції. Якщо функції $U(x, y)$ і $V(x, y)$ гармонічні функції і зв'язані умовами Коші-Рімана, то кажуть, що вони є **спряженими гармонічними** функціями.

Теорема 3..3 Для будь-якої функції $U(x, y)$, гармонічної в однозв'язній області $D \in \mathbb{C}$, існує спряжена їй функції $V(x, y)$, яка визначається з точністю до довільного сталого доданку¹³.

¹²Pierre-Simon Laplace, 1749-1827

¹³Але на практиці роблять простіше. Наприклад, відновити аналітичну функцію $f(z)$ за відомою її уявною частиною $V(x, y) = e^x \sin y + 2xy + 3y$.

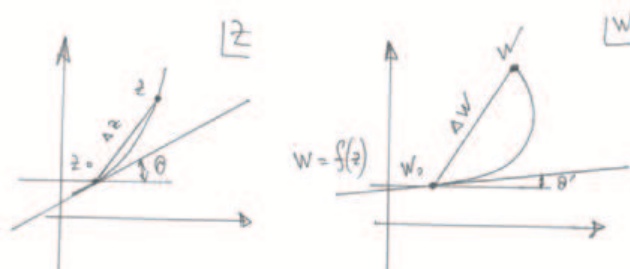
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow U = -\int (e^x \sin y + 2y) dy + C(x) = e^x \cos y - y^2 + C(x). \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow e^x \cos y + C'(x) = e^x \cos y + 2x + 3 \Rightarrow C(x) = x^2 + 3x + C. \\ f(z) &= e^x \cos y - y^2 + x^2 - 3x + i e^x \sin y + 2ixy + i3y + C = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) + (x + iy)^2 + 3(x + iy) + C = e^z + z^2 + 3z + C. \end{aligned}$$

Доведення. Нехай $U(x, y)$ — гармонічна функція, тоді вона задовольняє рівнянню Лапласа $\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)$, а тоді $\left(-\frac{\partial U}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dy$ є повним диференціалом функції $V(x, y)$, яка визначається

$$V(x, y) = \int -\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy + C.$$

3.3. Геометричний зміст похідної

Нехай $f(z)$ — диференційовна в деякому околі точки z_0 і $f'(z_0) \neq 0$. Розглянемо довільну гладку криву.



Проведемо січну через точки z і z_0 . За означенням похідної

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left\{ \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| e^{i \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}} \right\}.$$

Позначимо через θ кут між доточною і додатнім напрямком дійсної осі в точці z_0 . Тоді

$$\arg f'(z_0) = \arg \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \theta' - \theta.$$

Таким чином — це кут повороту кривої в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$. Кут повороту на залежить від вибору кривої, а залежить лише від точки z_0 .

Всі криві, які походять через точку z_0 повертаються на один і той же кут не лише за величиною, а й за напрямком. Маємо **консерватизм кутів** (збереження кутів).

Геометрично: $|\Delta w|$ — довжина вектора Δw . Тому $k = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ — коефіцієнт лінійного розтягу, він вказує наскільки відстань між точками змінюється при відображенні. Він не залежить від вибору кривої. $|\Delta w| = k|\Delta z|$ — вказує, що коло при відображенні переходить в коло (нескінченно малого радіусу).

Відображення, яке задається диференційовною функцією, ($f' \neq 0$) характеризується консерватизмом кутів і незалежністю коефіцієнта лінійного розтягу від напрямку, називається **конформним**¹⁴ («конформіс» — подібний).

¹⁴ $f(z) = z^2$, $z_0 = 0$, $f' = 2z = 0$. Нехай будуть два промені $\arg z = \alpha$ і $\arg z = \beta$ з точки $z = 0$. Їх відображення $\arg w = 2\alpha$ і $\arg w = 2\beta$. Початкові промені утворюють кут $\beta - \alpha$, а їх відображення — кут $2(\beta - \alpha)$. Звідси, відображення не буде конформним в точці $z = 0$.

Конформне відображення задається як неперервне і взаємнооднозначне відображення, яке:

4. Криві та області

Нехай на відрізку $\alpha \leq t \leq \beta$ задана неперервна комплексно-значна функція $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$. Тоді кажуть, що задана неперервна крива γ з її параметричним рівнянням $\sigma(t)$.

Крива є впорядкована за зростанням параметра орієнтована множина точок комплексної площини.

Крива з **протилежною орієнтацією** позначається γ^{-1} .

Якщо початок кривої збігається з її кінцем, то крива **замкнена**.

Неперервна крива, яка не має точок самоперетину, називається **простою (жордановою)** кривою.

Крива називається **гладкою**, якщо $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$ і $x(t)$ та $y(t)$ мають неперервні похідні; **кусково-гладкою**, коли її можна розбити на скінчене число гладких дуг. Гладка крива має у кожній своїй точці дотичну, причому нахил дотичної змінюється неперервно. Кусково-гладка крива може і не мати дотичних у скінченій кількості своїх точок, але у кожній з них існує ліва і права дотичні.

На замкненій жордановій кривій **додатній напрям** визначається так: якщо при русі вздовж кривої Γ внутрішня частина залишається **зліва**.

Крива називається **спряммованою**, якщо множина сум довжин усіх ламаних, включених в криу, обмежена, а точна верхня межа цієї множини називається **довжиною кривої**.

Множина називається **областю**, якщо вона

відкрита — для кожної точки множини існує окіл, який належить цій же множині;

зв'язна — будь які дві точки можна з'єднати кривою.

Область D називається **однотвірною**, якщо будь-яку замкнену криву можна неперервно деформувати в точку (якщо внутрішність довільного кусково-гладкого контура Жордана¹⁵, який цілком лежить у D , належить D). В протилежному разі область — **багатотвірна**.

Межі області складаються зі скінченного числа кусково-гладких кривих та ізолюваних точок.

Межові криві орієнтовані так, що при русі уздовж межової кривої в напрямку цієї орієнтації область D залишається **зліва**.

1. перетворює нескінченно малі кола в кола з точністю до малих більш великих порядків;
2. зберігає кути між кривими в точках їх прикладення.

Таким чином, щоб $f(z)$ реалізувала конформне відображення необхідно і достатньо, щоб вона була однолисною, аналітичною і мала відмінну від нуля першу похідну.

¹⁵Marie Ennemond Camille Jordan, 1838-1922

5. Інтеграл по комплексній змінній

Нехай на спряммованій кривій $\gamma : z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ означена функція $f(z)$. Розглянемо розбиття кривої γ на дуги. На кожній дузі γ_k довільно виберемо точку $\xi_k \in \gamma_k$ і визначимо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Якщо при $\Delta l \rightarrow 0$ (Δl — максимальна довжина дуги) існує скінчена границя інтегральних сум $S_n \rightarrow I$, яка не залежить від вибору точок z_k, ξ_k , то ця границя називається інтегралом від функції $f(z)$ по кривій γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = I = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Теорема 5.1 (достатня умова існування інтеграла) Якщо функція $f(z)$ означена і неперервна на кривій γ , то вона інтегрована вздовж цієї кривої.

Доведення. $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n (U(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - V(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) + \\ &+ i \sum_{k=1}^n (V(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + U(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k). \end{aligned}$$

Так як функції $U(x, y), V(x, y)$ — неперервні, існують скінчені границі (теорема Вейерштрасса), тоді переходячи до границі

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} U dx - V dy + i \int_{\gamma} V dx + U dy.$$

Таким чином інтеграл виражається через два дійсних криволінійних інтеграла другого роду.

5.1. Інтегрування по гладкій кривій

Якщо крива задана параметричним рівнянням $\gamma: z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то $dx = \xi'(t)dt$, $dy = \eta'(t)dt$ і маємо (зведення до означеного інтегралу)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (U\xi' - V\eta') dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (V\xi' + U\eta') dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (U + iV)(\xi' + i\eta') dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\sigma(t))\sigma'(t) dt. \end{aligned}$$

Приклад $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$, $\gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases} \quad z = x + iy = a \cos t + ib \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz &= \int_0^{\pi} \{\operatorname{Im}(a \cos t + ib \sin t)\} (a \cos t + ib \sin t)' dt = \\ &= \int_0^{\pi} b \sin t (-a \sin t + ib \cos t) dt = -ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + ib^2 \int_0^{\pi} \sin t \cos t dt = -\frac{\pi ab}{2}. \end{aligned}$$

5.2. Найпростіші властивості інтеграла

1. *Лінійність інтеграла*: якщо функція $f(z)$ і $g(z)$ інтегровні вздовж кривої γ , то

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz$$

$$2. \int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^{-1}} f(z) dz.$$

$$3. \int_{\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

4. **Теорема 5..2 (оцінка інтегралів)** Нехай функція $f(z)$ неперервна на кривій γ . То-

$$\text{ді має місце оцінка } \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

$|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ — елемент дуги кривої. З вказаної оцінки випливає простіша, але менш точна оцінка $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma)$, де $M = \max_{\gamma} |f(z)|$, $l(\gamma)$ — довжина кривої.

Доведення. Дійсно, з нерівності трикутника маємо

$$\left| \sum_k f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_k |f(\xi_k)| |z_k - z_{k-1}|.$$

Переходячи до границі, маємо $\int_{\gamma} |f(z)| |dz|$. Якщо винести $\max_{\gamma} |f(z)|$ прийдемо до другої оцінки.

5. **Теорема 5..3 (почленне інтегрування рядів)** Якщо ряд $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ неперервних на кривій γ функцій $f_k(z)$ рівномірно збігається на ній, то його можна інтегрувати почленно вздовж даної кривої $\int_{\gamma} F(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz$.

Доведення. За умовою рівномірної збіжності

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall z \in \gamma \quad \forall n > n_0 \Rightarrow \left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{l},$$

$l = |\gamma|$ — довжина кривої. Отже

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} \sum_{k=1}^n f_k(z) dz \right| = \\ & = \left| \int_{\gamma} \left(f(z) dz - \sum_{k=1}^n f_k(z) dz \right) \right| \leq \int_{\gamma} \left| f(z) dz - \sum_{k=1}^n f_k(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

6. **Теорема 5.4 (граничний перехід під знаком інтеграла)** Попередню теорему можна переформулювати: нехай функції $f(z, \omega)$ і $\varphi(z)$ інтегровні вздовж кривої γ і нехай при умові $\omega \rightarrow \omega_0$ прямування функцій $f(z, \omega)$ до границі $\varphi(z)$ є рівномірним вздовж $z \in \gamma$:

$$f(z, \omega) \xrightarrow{\gamma} \varphi(z) \quad (\omega \rightarrow \omega_0, \omega \in G).$$

Тоді можливий граничний перехід під знаком інтеграла, тобто

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{\gamma} f(z, \omega) dz = \int_{\gamma} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f(z, \omega) dz = \int_{\gamma} \varphi(z) dz.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, $l = |\gamma|$. За умовою $f(z, \omega) \xrightarrow{\gamma} \varphi(z)$ ($\omega \rightarrow \omega_0$, $\omega \in G$). Згідно з означенням рівномірного прямування до границі

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \omega \in G, \forall z \in \gamma : 0 < |\omega - \omega_0| < \delta \Rightarrow |f(z, \omega) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{l}.$$

Тому

$$\left| \int_{\gamma} f(z, \omega) dz - \int_{\gamma} \varphi(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z, \omega) - \varphi(z)| |dz| < \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon,$$

що з урахуванням довільного вибору $\varepsilon > 0$ і закінчує доведення.

5.3. Інтегральна теорема Коші

Одна з основних теорем теорії аналітичних функцій¹⁶.

¹⁶Огюстен Луї Коші (1789-1857). Закінчив Політехнічну школу і Школу мостів та доріг в Парижі. Був інженером шляхів сполучень. Із 833 робіт більше половини присвячено математичному аналізу, з них — 70 — ТФКЗ.

Теорема 5..5 Нехай функція $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ диференційовна в однозв'язній обмеженій області $D \subset \mathbb{C}$ і її похідна неперервна в цій області. Тоді інтеграл від $f(z)$ по будь якій замкненій спрямованій кривій γ , яка лежить в області D , дорівнює нулю

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Доведення. Згідно з властивістю інтеграла

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int U(x, y) dx - V(x, y) dy + i \int V(x, y) dx + U(x, y) dy.$$

Оскільки $f(z)$ має неперервну похідну в області D , то частинні похідні першого порядку функцій $U(x, y)$ і $V(x, y)$ є неперервними в області D , в якій виконуються умови Коші–Рімана. Тому

$$\oint_{\gamma} U dx - V dy = \oint_{\gamma} V dx + U dy = 0.$$

Щоб $\oint = 0$ необхідно отримати повний диференціал під інтегралом $0 = \oint d\varphi = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$, але $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V, \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, тому необхідна неперервність в кожній точці області, щоб інтеграл не залежав від шляху.

Відома з математичного аналізу формула Гріна (криволінійний інтеграл другого роду): якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні в замкненій області, а їх частинні похідні неперервні, то має місце рівність

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Теорема 5..6 (узагальнена теорема Коші) Нехай D обмежена однозв'язна область з кусково гладкою межею $\Gamma = \partial D$. Тоді, якщо функція $f(z)$ диференційовна в області D і неперервна аж до межі¹⁷ ∂D , то

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

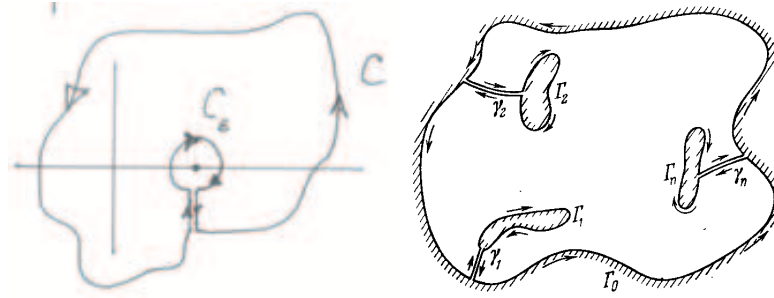
Зауваження. Важливим для теореми Коші є належність області D площині $\mathbb{C}$ (обмежена однозв'язна область).

Приклад $\oint_C \frac{dz}{z-2} = \oint_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-2}$. На колі C_ε : $z-2 = \varepsilon e^{i\varphi}$, $z = 2 + \varepsilon e^{i\varphi}$, $dz = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$,

$$\oint_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-2} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = 2\pi i \Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z-2} = 2\pi i$$

по будь якому контуру, що охоплює точку $z = 2$.

¹⁷Це для випадків, коли функція диференційовна в області, а на межі цієї області вона неперервна, але може мати стрибки похідної.



5.4. Узагальнення інтегральної теореми Коші на випадок багатозв'язних областей

Теорема 5..7 Нехай межа ∂D обмеженої багатозв'язної області D складається із замкненої кусково гладкої спрямованої кривої Γ_0 і замкнених кусково гладких кривих $\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_n$, які лежать у внутрішності кривої Γ_0 і попарно не перетинаються. Тоді, якщо функція $f(z)$ диференційовна в області D і неперервна аж до межі ∂D , то

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0,$$

або що теж саме

$$\oint_{\Gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} f(z) dz,$$

де криві Γ_k і Γ_0 однаково орієнтовані.

Доведення.

$$\oint_{\Gamma_0} f(z) dz - \oint_{\Gamma_1} f(z) dz - \oint_{\Gamma_2} f(z) dz = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma_0} = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k}.$$

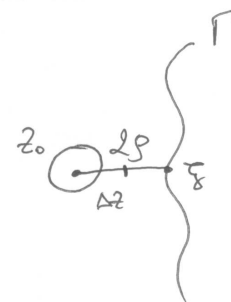
5.5. Інтеграл типу Коші

Якщо функція $f(z)$ неперервна вздовж кривої Γ (не обов'язково замкненої) і точка $z \notin \Gamma$, то кажуть, що функція $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ є **інтегралом типу Коші**.

Теорема 5..8 У кожній однозв'язній області D , яка не містить точок кривої Γ , інтеграл типу Коші $F(z)$ є диференційовною функцією, причому для кожного натурального числа $k \in \mathbb{N}$ справедлива рівність

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi.$$

Доведення. Зафіксуємо $z \in D$. Покладемо відстань від z до Γ рівною 2ρ . Очевидно, що $\rho > 0$. Нехай $0 < |\Delta z| < \rho$, тоді $(z + \Delta z) \notin \Gamma$ і для $\xi \in \Gamma$ маємо $|\xi - z| > \rho$, $|\xi - z - \Delta z| > \rho$. Беремо до уваги, що



$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta z}{\Delta z} \int \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z - \Delta z)}$$

маємо,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)} d\xi \right| < \\ &< \frac{1}{2\pi} \frac{|\Delta z|}{\rho^3} \underbrace{\max_{\xi \in \Gamma} |f(\xi)|}_{\cdot L} \cdot L, \end{aligned}$$

де L — довжина кривої. Так як $\Delta z \rightarrow 0$, то границя існує

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z).$$

Таким чином, $F(z)$ диференційовна¹⁸ в точці z , причому

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Твердження для $k \geq 2$ доводиться методом математичної індукції.

Наслідок. Функція $f(z)$, диференційовна в області D має похідну будь-якого порядку в кожній точці цієї області, тобто $f(z)$ є нескінченно диференційовною в області D .

Умови регулярності функції.

1. Достатньою умовою регулярності є диференційовність $f(z)$ в області D .
2. **Теорема 5..9 (теорема Морери¹⁹)** Якщо функція $f(z)$ неперервна в області D , а її інтеграл вздовж будь-якого простого замкненого контуру, який належить області D , дорівнює нулю, то $f(z)$ — регулярна в області D .

За умовами теореми існує первісна функція для $f(z)$: $F(z)$, $F'(z) = f(z)$. Але як диференційовна функція, вона нескінченно диференційовна, тому існує $F'' = f'(z)$.

3. Справедливе представлення у вигляді інтегралу Коші.
4. **Теорема 5..10 (перша теорема Вейерштрасса²⁰)** Якщо функції $f_n(z)$ регулярні в області D і ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ є рівномірно збіжним, то функція $f(z)$ — регулярна в області D .

Доведення. Функціональний ряд, який рівномірно збігається, можна інтегрувати по-членно. Тому, записуючи інтегральну теорему Коші, прийдемо до регулярності.

¹⁸Формально — диференційовна за параметром!

¹⁹Giacinto Morera, 1956-1909

²⁰Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815-1897

Властивості регулярних функцій.

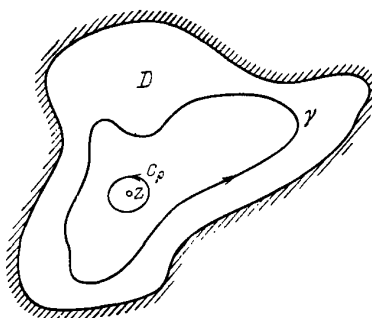
1. Сума, різниця, добуток, частка і суперпозиція регулярних функцій — регулярні функції.
2. Нескінченна диференційовність.
3. Інтегральна теорема Коші.
4. Інтегральна формула Коші.

5.6. Інтегральна формула Коші

Випливає з теореми Коші і є однією з найважливіших формул ТФКЗ.

Теорема 5..11 Нехай функція $f(z)$ — диференційовна в однозв'язній області D , а γ — замкнена Жорданова спрямована крива, яка міститься разом зі своєю внутрішністю G в області D . Тоді для довільної точки $z \in G$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$



Доведення. Функція $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ диференційовна відносно ξ в області D з виключеною точкою z . Виберемо $\rho > 0$ так, щоб круг $|\xi - z| < \rho$ разом зі своєю межею $C_\rho : |\xi - z| = \rho$ належав G . Тоді з теореми Коші для багатозв'язних областей дістанемо

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Але інтеграл не залежить від радіуса кола ρ . Тому можна взяти границю при $\rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \rho e^{i\varphi} i d\varphi = f(z).$$

5.7. Інтеграл і первісна комплексної функції

Нехай функція $f(z)$ означена в області D , а $F(z)$ диференційовна в цій області. Якщо $F'(z) = f(z)$ для всіх $z \in D$, то функція $F(z)$ називається **первісною функцією** для $f(z)$ в області D .

Теорема 5..12 (теорема існування первісної) Якщо функція $f(z)$ диференційовна в однозв'язній області $D \subset \mathbb{C}$, то вона має первісну в цій області.

Доведення. Зафіксуємо точку $z_0 \in D$ і візьмемо якусь точку $z \in D$. Тоді інтеграл від диференційовної функції не залежить від шляху інтегрування. Дійсно, згідно теореми

Коші $\oint = \int_{z_0 \gamma_1}^z \dots + \int_{z_0 \gamma_2}^z \dots = 0$, звідси $\int_{z_0 \gamma_1}^z \dots = \int_{z_0 \gamma_2}^z \dots$. Тому можемо розглядати інтеграл

$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = F(z)$ як функцію верхньої межі, $z \in D$. Переконаємось, що $F(z)$ є первісною для $f(z)$ в D :

$$F'(z) = \left(\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right)' = f(z).$$

Розглянемо відношення при малому Δz :

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right\} = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi.$$

За інтегральною лемою Коші далі вважаємо інтегрування вздовж відрізка $[z, z + \Delta z]$ по прямій. Покажемо, що

$$\sigma = \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0.$$

Оскільки $\int_z^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z$, то $\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi = f(z)$. Тоді

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi.$$

Звідси

$$|\sigma| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)| d\xi.$$

Внаслідок неперервності $f(z)$ у точці z для будь-якого $\varepsilon > 0$ знаходиться $\delta > 0$ таке, що має місце нерівність $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$. Якщо ξ належить відрітку $[z, z + \Delta z]$, то $|z - \xi| \leq |\Delta z|$ і, якщо $|\Delta z| < \delta$, то $|\sigma| < \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z|$, тобто $|\sigma| < \varepsilon$, якщо $|\Delta z| < \delta$.

Таким чином $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$ і $F'(z) = f(z)$.

Наслідок. Нехай функція $f(z)$ неперервна в D і інтеграл від цієї функції уздовж довільної замкненої кривої, котра належить до області D , дорівнює нулю, або, що теж саме, інтеграл не залежить від шляху інтегрування в області D . Тоді функція $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ є первісною для функції $f(z)$ в області D ²¹.

Теорема 5.13 *Загальний вид первісної для диференційовної в однозв'язній області функції $f(z)$ задається формулою $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C$, $C = \text{const}$ — довільна стала.*

²¹Для будь-якої диференційовної в однозв'язній області функції існує первісна.

Доведення. Розглянемо $\Phi(z) - \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi = w(z)$. Тоді $\Phi'(z) - f(z) = w'(z) = 0$, звідки $w = \text{const}$.

Наслідок. Нехай функція $f(z)$ неперервна в області D і інтеграл від цієї функції уздовж довільного замкненого контура, який належить до області D , дорівнює нулю, або, що теж саме, інтеграл не залежить від шляху інтегрування в D . Цим же умовам нехай задовольняє і функція $g(z)$. Тоді:

1. кожна первісна $F(z)$ для функції $f(z)$ в області D визначається за формулою $\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi + C$, де C — довільна комплексна стала.

2. справедлива формула Ньютона–Лейбница $\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$.

3. справедлива формула інтегрування за частинами

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)g'(\xi)d\xi = f(\xi)g(\xi)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi)g(\xi)d\xi.$$

Таким чином, всі формули математичного аналізу для інтегрування диференційовних функцій цілком слушні.

6. Ряди комплексної змінної

6.1. Числові ряди

Теорема 6..1 (критерій Коші) Для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова — для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число N , щоб при довільних $n > N$ мала місце нерівність

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall m \in \mathbb{N} : |S_{N+m} - S_N| = \left| \sum_{k=1}^m z_{N+k} \right| < \varepsilon.$$

Це витікає з критерію Коші для збіжності послідовностей, $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$. Якщо ряд **збігається**, то переходячи до границі у рівності $S_n - S_{n-1} = z_n$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Ряд називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається і ряд $|z_1| + |z_2| + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

Теорема 6..2 Якщо ряд збігається абсолютно, то він збігається.

$$\text{Дійсно, } \left| \sum_{k=1}^m z_{N+k} \right| \leq \sum_{k=1}^m |z_{N+k}|.$$

Теорема 6..3 (теорема порівняння) Якщо ряд $\sum_{k=1}^n U_k$ збігається абсолютно і виконується умова $|V_k| < |U_k|$, то і ряд $\sum_{k=1}^n V_k$ збігається абсолютно.

6.2. Функціональні ряди

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)$, членами якого є функції $U_k(z)$ означені в області D , називається **функціональним**. При кожному фіксованому $z \in D$ ряд стає числовим и у випадку його збіжності, можна говорити про його суму. За означенням $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)$ є **сумою** ряду, якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, z) : n > N \Rightarrow \left| S(z) - \sum_{k=0}^n U_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Якщо N не залежить від z , то ряд називається **рівномірно збіжним**.

Теорема 6..4 (критерій Коші рівномірної збіжності) Для рівномірної збіжності ряду на множині D необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall m \in \mathbb{N}, \forall z \in D \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^m U_{N+k}(z) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 6..5 (теорема Вейерштрасса) Якщо кожен член ряду, починаючи з якогось номера N задовольняє умові $|U_k(z)| \leq a_k, \forall z \in D$, причому ряд з додатних чисел $\sum_k a_k$ збіжний, то ряд $\sum_k U_k(z)$ збігається на D , причому рівномірно.

$$\text{Дійсно, } \left| \sum_{k=N+1}^{N+m} U_k(z) \right| \leq \sum_k |U_k(z)| \leq \sum_k a_k.$$

6.3. Степеневі ряди

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z - z_0)^k$. Частіше розглядають ряд, який отримано після сдвигу початку $\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$.

Існують ряди, які збігаються тільки в одній точці: $(z=0)$ $1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; або на всій комплексній площині: $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$. Існують ряди, збіжні в одних точках комплексної площини і розбіжні в інших: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ — збігається, коли $|z| < 1$.

6.3.1 Збіжність степеневих рядів

Теорема 6.6 (перша теорема Абеля²²) Якщо степеневий ряд збігається в точці $z_0 \neq 0$, то він збігається, причому абсолютно, в крузі $|z| < |z_0|$ і рівномірно збігається в кожному меншому крузі $|z| \leq \rho < |z_0|$.

Доведення. Дійсно, із збіжності ряду при $z = z_0$ випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n z_0^n = 0, \quad \Rightarrow |C_n z_0^n| < M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

тому

$$|C_n z^n| = |C_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n < M \cdot q^n, \quad q = \left| \frac{z}{z_0} \right|.$$

А оскільки ряд з додатними членами Mq^n збігається при $q < 1$, то безпосередньо виходить, що ряд абсолютно збігається при $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$.

Далі, нехай $z \in K_\rho$: $|z| \leq \rho < |z_0|$, тоді

$$|C_n z^n| < M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left(\frac{\rho}{|z_0|^n} \right)^n, \quad \frac{\rho}{|z_0|^n} < 1,$$

не залежить від z , тому за ознакою Вейерштрасса ряд збігається рівномірно.

Наслідок. За теоремою Абеля у крузі $|z| < R$, де R — точна верхня межа відстані від точки $z = 0$ до точки z , в яких ряд збігається, степеневий ряд збігається, причому рівномірно і абсолютно. При $|z| > R$ ряд розбігається.

|| Круг цей називається **кругом збіжності**, а його радіус R — **радіусом збіжності**.

6.3.2 Визначення радіусу збіжності

Для дійсного аналізу для рядів $\sum a_n$ з додатними коефіцієнтами маємо дві умови збіжності

1. **умова Даламбера:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$;

²²Niels Henrik Abel, 1802-1829

2. **умова Коші**²³: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

Це можна узагальнити і на комплексні числа.

1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, тоді $R = \frac{1}{l}$. Дійсно, маємо

$$\left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |z - z_0| = l \cdot |z - z_0| < 1 \Rightarrow |z - z_0| < \frac{1}{l}.$$

2. **Формула Коші-Адамара**²⁴²⁵. Верхня межа обмеженої послідовності $\{\alpha_n\}$ — $\lambda = \overline{\lim} \alpha_n$ — це сама більша гранична точка послідовності²⁶. Тоді $R = \frac{1}{l}$, де $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$. Причому $R = 0$, коли $l = \infty$ і $R = \infty$, коли $l = 0$ ²⁷.

6.3.3 Властивості степеневих рядів

1. **Теорема 6..7** Сума степеневого ряду неперервна в кожній внутрішній точці круга його збіжності²⁸.

Кожен член $C_n z^n$ — неперервна функція, то для рівномірної збіжності рядів і сума є неперервною.

2. **Теорема 6..8** Степеневий ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ можна почленно диференціювати в крузі його збіжності $|z| < R$ ($R > 0$) яке завгодно число разів²⁹. Усі степеневі ряди, що виникають при цьому мають один і той радіус збіжності.

²³В умові Даламбера стоїть звичайна границя, а у випадку умови Коші — верхня границя. Якщо в умові Даламбера брати верхню границю, то коли вона більше 1, зробити висновки про розбіжність ряду неможливо. Наприклад, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Тобто ряд збігається,

хоча для нього $\overline{\lim} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n = \infty$.

²⁴Jacques Salomon Hadamard, 1865-1963

²⁵Коші знайшов, Адамар довів

²⁶Наприклад, для $x_n = (-1)^n$, $\underline{\lim} x_n = -1$, $\overline{\lim} x_n = 1$; для $x_n = n + (-1)^n \cdot n$, $\underline{\lim} x_n = 0$, $\overline{\lim} x_n = \infty$

²⁷При можуть бути різні випадки. Так, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — збіжний,

хоча для них $l = 1$.

²⁸Інше трактування: якщо члени функціонального ряду неперервні функції в області D і ряд збігається рівномірно, то його сума $f(z)$ неперервна в області D . Нехай $z_0, z_0 + \Delta z \in D$, тоді з рівномірної збіжності $|f(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|f(z_0 + \Delta z) - S_n(z_0 + \Delta z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Крім того, часткові суми S_n — неперервні за означенням. Тому при вибраному n маємо $|S_n(z_0 + \Delta z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді

$$|f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)| \leq |f(z_0 + \Delta z) - S_n(z_0 + \Delta z)| + |S_n(z_0 + \Delta z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Таким чином $f(z)$ неперервна в довільній точці $z_0 \in D$.

²⁹Рівномірна збіжність дає змогу почленно інтегрувати, а тому, переходячи до

$$\int_{\gamma} S'(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\gamma} k z^{k-1} dz = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + C_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

а це вже первісна. Тому можемо застосовувати і інтегральну теорему Коші.

$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$. За формулою Коші-Адамара, маємо

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (k |a_k|)^{\frac{1}{k-1}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{k-1}} \left(|a_k|^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (|a_k|)^{\frac{1}{k}}.$$

Наслідок. Сума степеневого ряду $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ диференційовна яке завгодно число разів у крузі його збіжності $|z-a| < R$.

3. **Теорема 6..9 (ряд Тейлора)** Коефіцієнти степеневого ряду $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$, який збігається у крузі $|z-a| < R$, $R > 0$, визначаються через суму ряду за формулою

$$C_0 = f(a), \quad C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Доведення. Нехай $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$, тоді в крузі його збіжності

$$S^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-p+1) C_k (z-a)^{k-p}.$$

Якщо покласти $z = a$, то

$$S^{(p)}(a) = p(p-1)(p-2) \cdots 1 C_p \Rightarrow C_p = \frac{S^{(p)}(a)}{p!}.$$

Таким чином $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$. Цей ряд називають **рядом Тейлора**.

Наслідок. Кожний степеневий ряд з радіусом збіжності $R > 0$ є рядом Тейлора для своєї суми в околі точки $z = z_0$.

6.4. Голоморфність функцій

Функція $f(z)$, яка визначена в околі точки $z = a$ і представлена у вигляді розвинення в степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-a)^k$ який збігається в деякому околі точки $z = a$, називається **голоморфною**, або **регулярною** в точці $z = a$. Функція називається **голоморфною**, або **регулярною в області D** , якщо вона регулярна в кожній точці області D .

Теорема 6..10 Якщо функція $f(z)$ диференційовна в області D , то вона голоморфна в цій області.

Доведення. Нехай $z = a$ — довільна точка області D . Розглянемо круг $\mathbb{K} : |z-a| < \rho$, $\rho > 0$, який належить D разом зі своєю межею $\gamma_\rho : |z-a| = \rho$. Нехай z — довільна точка круга $\mathbb{K}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Розкладемо $\frac{1}{\xi - z}$ в ряд за степенями $z - a$:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}.$$

Якщо $\xi \in \gamma_\rho$, то $|\xi - a| = \rho$, $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho} < 1$. Тому ряд збігається рівномірно відносно ξ на γ_ρ (ознака Вейерштрасса)

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n.$$

Інтегруючи по членно уздовж γ_ρ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n, \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi.$$

Таким чином, функція $f(z)$ голоморфна (представлена у вигляді ряду) в області D тоді і тільки тоді, коли вона диференційовна в цій області.

6.4..1 Нулі голоморфної функції

Точка a називається нулем голоморфної функції $f(z)$, якщо $f(a) = 0$.

Нехай $a \neq \infty$, тоді в околі точки a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n.$$

Оскільки a — нуль $f(z)$, то $C_0 = f(a) = 0$.

Якщо C_m — перший відмінний від нуля коефіцієнт розвинення

$$f(z) = C_m (z - a)^m + C_{m+1} (z - a)^{m+1} + \dots, \quad C_m \neq 0,$$

то число m називають порядком (або кратністю) нуля a функції $f(z)$.

Оскільки

$$C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

то порядок нуля дорівнює найменшому порядку похідної $f(z)$, відмінної від нуля в точці a .

Тоді можна записати

$$f(z) = (z - a)^m (C_m + C_{m+1}(z - a) + \dots) = (z - a)^m g(z).$$

Таким чином доведена

Теорема 6.11: Точка $a \neq \infty$ є нулем порядку m функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли ця функція приводиться до вигляду

$$f(z) = (z - a)^m g(z),$$

де $g(z)$ — голоморфна функція в точці a , $g(a) \neq 0$.

Теорема 6.12: Нехай функція $f(z)$ голоморфна в точці $a \neq \infty$: $f(a) = 0$. Тоді або $f(z) \equiv 0$ в деякому околі точки a , або існує такий окіл точки a , в якому немає нулів функції $f(z)$, відмінних від a .

Може бути:

- всі коефіцієнти дорівнюють нулю, тоді $f(z) \equiv 0$;
- існує таке $m \geq 1$, що $C_0 = C_1 = \dots = C_{m-1} = 0$, але $C_m \neq 0$.

Тоді $f(z) = (z - a)^m g(z)$.

В силу неперервності $g(z)$ з умови $g(a) \neq 0$ випливає, що $g(z) \neq 0$ в деякому околі точки a . Таким чином, нулі голоморфної функції ізольовані.

6.4..2 Єдиність аналітичної функції

З теореми Тейлора, як наслідок, маємо:

Якщо голоморфні в D функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ рівні між собою на деякій множині $E \subset D$, яка має хоч одну граничну точку $z_0 \in E$, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ повсюди в області D .

Дійсно, розглянемо розвинення

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \\ \varphi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Візьмемо послідовність z_n . Починаючи з деякого номера k , всі z_n знаходяться в колі $|z - z_0| < \delta$ і ми маємо

$$f(z_n) = \varphi(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Але тоді, підставляючи в розвинення і переходячи до границі, маємо

$$a_0 = b_0.$$

Далі, з рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_n - z_0)^{k-1}$$

отримаємо $a_1 = b_1$.

А оскільки радіус збіжності більший за $|\delta|$, то маємо $f(z) \equiv \varphi(z)$ для всієї області.

Наслідок: Якщо $f(z) = 0$ на деякій множині E області D , і маємо на множині E хоча б одну граничну точку, то $f(z) \equiv 0$ у всій області D .

Функція $f(z) = \sin \frac{1}{z} \neq 0$, хоч і задовольняє умові $f(z_n) = 0$, де $z_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Це не суперечить теоремі єдиності, оскільки точка $a = 0$, будучи граничною точкою послідовності z_n , до області $D = \{0 < |z| < \infty\}$ регулярності функції $f(z)$ не належить.

Теорема 6.13: Точка $z = \infty$ є нулем порядку m функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли ця функція перетворюється до вигляду

$$f(z) = z^{-m} \theta(z), \quad \theta(\infty) \neq 0,$$

де $\theta(z)$ — регулярна функція в точці $z = \infty$.

Означення: Функція $f(z)$ називається регулярною в точці $z = \infty$ ($|z| > R$), коли її розвинення в околі цієї точки має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}.$$

$$\left(\xi = \frac{1}{z} \Rightarrow f(z) = f(\xi) = \sum C_k \xi^k\right).$$

З цього означення

$$f(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}.$$

За умовою $C_0 = f(\infty) = 0$. Нехай $C_m \neq 0$, $C_1 = C_2 = \dots = C_{m-1} = 0$. Тоді

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \left(C_m + \frac{C_{m+1}}{z} + \dots \right) = z^{-m} \Psi(z), \quad \Psi(\infty) = C_m \neq 0.$$

6.5. Принцип симетрії Рімана–Шварца

Теорема 6.13: Нехай функція $f(z)$ регулярна в області D , межа якої містить інтервал γ дійсної осі. Якщо функція $f(z)$ неперервна аж до межі γ та набуває дійсних значень на γ , то її можна аналітично продовжити в область $D \cup \gamma \cup D^*$.

Це продовження надається формулою

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D \cup \gamma, \\ f^*(z) & \text{при } z \in D^* \cup \gamma, \end{cases}$$

де область D^* симетрична області D відносно γ . [Іншими словами, $f(z)$ в спряжених точках набуває спряжених значень].

Для будь-якої точки $z_0 \in D$

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Визначимо в області D^* функцію

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Її розвинення в ряд

$$f^*(z) = \overline{a_0} + \overline{a_1}(z - \bar{z}_0) + \dots$$

показує, що вона є голоморфною в околі точки $\bar{z}_0 \in D^*$, симетричної до точки z_0 .

Функція $f(z)$ неперервна аж до межі і набуває на γ дійсних значень. За умови $z \rightarrow x_0 \in \gamma$ і $\bar{z} \rightarrow x_0$ маємо

$$\lim_{z \rightarrow x_0} f^*(z) = \lim_{z \rightarrow x_0} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0) = f(z), \quad z = \bar{z} = x \in \gamma.$$

$f(x_0)$ — дійсне, тоді $\overline{f(x_0)} = f(x_0)$. Тобто для всіх $z \in \gamma$

$$f^*(z) = f(z).$$

Таким чином, дійсно побудовано аналітичне продовження, яке задовольняє умові

$$\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)},$$

що й означає симетрію відносно γ образів двох точок z і $\bar{z}$, симетричних відносно γ .

Функції, що на дійсній осі набувають дійсних значень, називають реально-аналітичними. Якщо брати розвинення такої функції в околі точки z_0 , що знаходиться на дійсній осі, всі коефіцієнти розвинення будуть дійсними.

Для чого призначена ця теорема: якщо *вставити малюнок 2*, то стрибок через розріз буде дорівнювати $f(z) - f(z^*) = 2iv$.

7. Ізольовані особливі точки

7.1. Ряд Лорана

Ряд Тейлора — це представлення функцій, диференційовних в колі. Але для області у вигляді кільця більш підходить ряд Лорана, який є узагальненням ряду Тейлора.

Рядом Лорана називають функціональний ряд виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n(z-a)^n.$$

Якщо другий доданок відсутній, то цей ряд перетворюється у ряд Тейлора. Другий доданок називають головною, або ірегулярною частиною, тоді як першу — правильною, або регулярною.

Перший ряд збігається в колі $\{|z-a| < R\}$. Заміною $\frac{1}{z-a} = t$ перетворимо другий ряд у звичайний степеневий

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} t^n.$$

Областю збіжності буде коло $\{|t| < \mu\}$. Тому очевидно, що головна частина ряду Лорана збігається в області $\{|z-a| > r\}$, $r = \frac{1}{\mu}$. Таким чином, ряд Лорана збігається у кульовому кільці $K = \{r < |z-a| < R\}$.

В точках, які належать межі кільця, ряд може збігатися або ні.

З теореми Абеля випливає, що в будь-якому замкненому кільці $\{r < r_1 \leq |z-a| \leq R_1 < R\}$, яке належить кільцю K , ряд збігається рівномірно і тому за теоремою Вейерштрасса (про достатню умову регулярності) його сума $f(z)$ є функцією регулярною.

Доведемо і обернене твердження:

Теорема 7.1 (теорема Лорана): Якщо функція $f(z)$ регулярна в кільці $K = \{r < |z-a| < R\}$, то вона розвивається у цьому кільці у збіжний ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n,$$

де

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi,$$

$$\gamma_\rho : |\xi - a| = \rho, \quad z < \rho < R.$$

Доведення:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-z|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)d\xi}{(z-a)\left(1-\frac{\xi-a}{z-a}\right)} + \oint_{\gamma_R} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)\left(1-\frac{z-a}{\xi-a}\right)}. \end{aligned}$$

Оскільки $\left| \frac{\xi-a}{z-a} \right| = \frac{\rho_1}{|z-a|} < 1$, то ряд рівномірно збігається на кривій γ_r . На підставі цього ряд

$$\frac{-f(\xi)}{2\pi i(\xi-z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi-a)^k}{2\pi i(z-a)^{k+1}},$$

тобто збігається рівномірно. Інтегруючи почленно і роблячи підстановку $k+1 = -n$, дістаємо $\sum_{k=0}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=-1}^{-\infty}$

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{R_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi, \quad k = -1, -2, \dots$$

Завдяки тому, що $f(z)/(\xi-a)^{k+1}$ диференційовна при $\xi \in K$, то в силу теореми Коші інтеграл можна брати по будь-якому колу з центром в точці a , яка належить K

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi, \quad k = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \\ -1, -2, \dots \end{cases}$$

Теорема 7.2: Розвинення функції $f(z)$, регулярної в кільці $D = \{r < |z-a| < R\}$, в ряд Лорана є єдиним.

Нехай існує два розвинення

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(z-a)^n.$$

Помноживши на $(z-a)^{-m-1}$, дістанемо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^{n-m-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(z-a)^{n-m-1}.$$

Інтегруємо вздовж кола $\gamma_\rho = \{|z-a| = \rho\}$ на підставі рівності

$$\oint (z-a)^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases}$$

отримуємо, що $C_m = d_m$.

7.2. Аналітичне продовження

Якщо виконуються умови:

1. функція $f(z)$ визначена на множині E ,
2. функція $F(z)$ регулярна в області D , $E \subset D$,
3. $F(z) = f(z)$ на E ,

то функцію $F(z)$ називають аналітичним продовженням функції $f(z)$ з множини E в область D .

Найважливішою властивістю аналітичного продовження є його єдиність, яка випливає з попереднього розгляду.

Приклад:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Сумою цього ряду є функція $1/(1-z)$, тому

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

З іншого боку, $F(z) = \frac{1}{1-z}$ регулярна в області $D = C \setminus \{1\}$. Але $\{|z| < 1\} \subset D$ і $F(z) \equiv f(z)$ на множині $\{|z| < 1\}$. Отже, $F(z)$ є (єдиним!) аналітичним продовженням $f(z)$.

7.3. Ізольовані особливі точки однозначного характеру

Точку $a \neq \infty$ називають ізольованою особливою точкою однозначного характеру функції $f(z)$, якщо $f(z)$ регулярна в кільці $D = \{0 < |z - a| < R\}$ (проколотому околі точки a) і не регулярна в точці a .

Аналогічно, точку $a = \infty$ називають ізольованою особливою точкою однозначного характеру, якщо $f(z)$ регулярна в області $R < |z| < \infty$ і не регулярна в точці ∞ .

Класифікація ізольованих особливих точок однозначного характеру

Ізольована особлива точка однозначного характеру називається

1. усувною особливою точкою, якщо $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ існує і скінченна,
2. полюсом, якщо $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$,
3. істотно особливою точкою, якщо $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ не існує.

Приклад:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{z+i} = \left\{ \frac{e^z - 1}{z} \right\} = \infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} \text{ не існує: } x \rightarrow 0 \quad \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty, & x > 0 \\ \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow 0, & x < 0. \end{cases}$$

I. Усувна особлива точка

Теорема 7.3: Для того, щоб точка a була усувною особливою точкою $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана у точці a була тотожним нулем.

Необхідність: Нехай $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \neq \infty$. Тоді в проколотому околі точки a функція $f(z)$ регулярна і обмежена

$$|f(z)| \leq M, \quad 0 < |z - a| < \rho.$$

Але для коефіцієнтів ряду Лорана

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\xi)(\xi - a)^{-n-1} d\xi,$$

тому

$$|C_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max\{|f(\xi)| |\xi - a|^{-n-1}\} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}, \quad 0 < r < \rho.$$

Оскільки r довільне, спрямовуємо $r \rightarrow 0$ і встановлюємо, що $C_{-n} = 0$. [Для правильної частини $|C_n| < \infty$, що не протирічить.]

Достатність: Якщо головна частина $\equiv 0$, то

$$f(z) = C_0 + C_1(z - a) + C_2(z - a)^2 + \dots$$

Ряд збігається в усьому колі $|z - a| < R$. Таким чином, існує скінченна границя $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = C_0$, а тому a — усувна точка $f(z)$.

Зауваження: Якщо зробити аналітичне продовження в цю точку, то це носить назву усуваної особливості. Після визначення функції в точці a маємо регулярну функцію на всій комплексній площині.

II. Полюс

Теорема 7.4: Для того, щоб точка $a \neq \infty$ була полюсом функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція записувалась у вигляді

$$f(z) = (z - a)^{-m} \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0,$$

$\varphi(z)$ — регулярна, а m — ціле.

Аналогічно, $z = \infty$ є полюсом тоді і тільки тоді, коли

$$f(z) = z^m \zeta(z), \quad \zeta(\infty) \neq 0.$$

Доведення. Нехай $a \neq \infty$ — полюс. Тоді за означенням $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Звідси випливає $|f(z)| > 1$ в деякому кільці $D = \{0 < |z - a| < a\}$. Нехай $g(z) = 1/f(z)$. Тоді $g(z)$ — регулярна в області D і не перетворюється в нуль. Отже, a — ізольована особлива точка для $g(z)$. З нерівності випливає, що $|g(z)| < 1$ в D і за теоремою — це усувна точка.

Довизначивши

$$g(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

отримаємо $g(z) = (z - a)^m \varphi(z)$. Звідси

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z - a)^m}, \quad F(z) = \varphi^{-1}(z).$$

Якщо $f(\infty)$ — полюс, то $z = \infty$ є нулем $g(z) = 1/f(z)$. Далі аналогічно.

Наслідок: В головній частині ряду Лорана буде міститися лише скінченне число членів (стільки, який порядок полюса).

III. Істотно особлива точка

Теорема 7.5: Для того, щоб ізольована особлива точка була істотно особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана у цій точці містила нескінченне число членів.

1. Якщо немає головної частини, то усувна точка.
2. Якщо скінченне число членів — полюс.

Тому існує лише одна можливість нескінченного числа членів.

Нескінченно віддалена точка

Нехай $f(z)$ регулярна в області $|z| > R$ всюди, крім $z = \infty$. Тоді $f(1/\xi)$ регулярна в колі $|\xi| = |1/z| < 1/R$ всюди, крім точки $\xi = 0$, яка буде ізольованою особливою точкою. Розвинення в ряд Лорана має вигляд

$$f(1/\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \xi^{-k}.$$

Після заміни $\xi = 1/z$ маємо розвинення в околі $z = \infty$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k.$$

В залежності від того, $\xi = 0$ є усувною ізольованою особливою точкою, полюсом або істотно особливою точкою, кажуть, що $z = \infty$ є відповідно усувною, полюсом або істотно особливою точками.

Для цілої функції єдиною особливою точкою може бути $z = \infty$. Якщо $z = \infty$ є полюсом порядку m , то $f(z)$ є многочленом степеня m . Якщо $z = \infty$ — істотно особлива точка, то $f(z)$ — ціла трансцендентна функція.

$$e^z, \cos z, \sin z, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Якщо ціла функція регулярна в точці $z = \infty$, то $f(z) = C_0 = \text{const}$.

Отже, якщо функція регулярна на всій розширеній комплексній площині, то вона стала.

Означення: Функція називається мероморфною, якщо в кожній обмеженій частині комплексної площини вона регулярна за винятком, може бути, скінченного числа полюсів. Частка двох многочленів (раціональна функція) є мероморфною функцією, яка на всій розширеній комплексній площині має тільки скінченне число полюсів. Обернене твердження також справедливе.

7.4. Теорія лишків

7.4..1 Лишки у скінченній точці

Якщо функція регулярна в області D , то інтеграл $\oint f(z)dz = 0$ по кривій, яка належить області D . Якщо функція має особливу точку однозначного характеру, то $\oint f(z)dz \neq 0$. Знайдемо значення цього інтегралу. Для цього зробимо розвинення в ряд Лорана в околі цієї точки

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(z-a)^k,$$

який збігається в кільці $\{0 < |z-a| < R\}$.

Інтегруючи почленно, маємо

$$\oint_{\gamma} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1 \\ 2\pi i, & m = -1 \end{cases}$$

Тоді

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i C_{-1}.$$

{Лишок (вычет) — від французького *residue*.}

|| Означення: Лишком функції $f(z)$ в точці a (відносно точки a) називається коефіцієнт C_{-1} ряду Лорана функції $f(z)$ в точці a

$${}_{z=a}f(z) = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)dz.$$

7.4..2 Знаходження лишків (у скінченній точці)

1. Усувна точка, точка регулярної функції

$$f(z) = 0$$

(тільки правильна частина ряду Лорана).

2. Простий полюс

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-a)^k.$$

Помноживши цю рівність на $(z-a)$, далі граничним прямуванням по $z \rightarrow a$ знаходимо

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} [f(z)(z-a)] = {}_{z=a}f(z).$$

Зокрема, якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$, $\varphi(a) \neq 0$, $\Psi(a) = 0$, $\Psi'(a) \neq 0$

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\Psi(z)}{z-a}} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\Psi(z)-\Psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\Psi'(a)}.$$

3. Кратний полюс

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$$

Домножуючи на $(z-a)^m$, а потім диференціюючи $(m-1)$ разів, граничним прямуюванням $z \rightarrow a$ встановлюємо, що

$$(m-1)!C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}.$$

Звідси

$$z=a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)].$$

4. Істотно особлива точка

— тільки розвиненням в ряд.

Приклад:

$$\begin{aligned} \cos \frac{z}{z-1}, \quad a=1, \quad f(z) &= (2z-1) \cos \frac{z}{z-1} \\ \cos \frac{z-1+1}{z-1} &= \cos \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \cos 1 \cos \frac{1}{z-1} - \sin 1 \sin \frac{1}{z-1} \\ f(z) &= (2(z-1)+1) + \left\{ \cos 1 \left(1 - \frac{1}{2(z-1)^2} + \dots\right) - \sin 1 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2!(z-1)^3} + \dots\right) \right\} \\ \Rightarrow \quad C_{-1} &= -\cos 1 - \sin 1 = \underline{-(\cos 1 + \sin 1)}. \end{aligned}$$

7.4..3 Лишок у нескінченності

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots$$

в кільці $\{R < |z| < \infty\}$.

Тоді лишком функції $f(z)$ в точці $z = \infty$ називається число $-C_{-1}$. Дійсно, оскільки для коефіцієнтів ряду Лорана

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\xi) d\xi, \quad \gamma: |z| = R,$$

то для нескінченно віддаленої точки орієнтацію кривої потрібно брати так, щоб область була зліва.

Таким чином, маємо

$$\oint_{\gamma^{-1}} f(z) dz = 2\pi i_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}$$

$$z=\infty f(z) = -C_{-1}$$

Зауваження: В нескінченно віддаленій точці лишок в усуній точці не завжди дорівнює нулю:

$e^{1/z}$, $z = \infty$ — регулярна точка, але

$$_{z=\infty} e^{1/z} = -C_{-1} = -1 \neq 0.$$

Можна узагальнити.

Якщо $f(z)$ регулярна в $z = \infty$, то

$$f(z) = f(\infty) + \frac{C_{-1}}{z} + \dots$$

Тоді

$$f(z)|_{z=\infty} = -C_{-1} = \lim z(f(\infty) - f(z))$$

Для функції $e^{1/z}$: $f(\infty) = 1$

$$f(z) = \lim \frac{1 - e^{1/z}}{1/z} = \frac{1 - 1 - 1/z - \dots}{1/z} = -1$$

7.4.4 Теореми про лишки

Теорема 7.6 (основна теорема теорії лишків, Коші, 1825): Нехай функція $f(z)$ регулярна в обмеженій однозв'язній області D , за винятком скінченного числа точок $a_1, a_2, \dots, a_n$, що є її ізольованими особливими точками однозначного характеру, і неперервна аж до межі $\gamma = \partial D$. Тоді

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=a_k} f(z),$$

де крива γ орієнтована додатно.

Застосовуючи теорему Коші для багатозв'язної області, одержимо

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum \oint_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Звідки за означенням лишків

Теорема 7.7: Нехай функція $f(z)$ регулярна на всій розширеній комплексній площині $\bar{C}$, за винятком скінченного числа особливих точок. Тоді сума всіх її лишків в особливих точках, включаючи і лишок в точці $z = \infty$, дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=a_k} f(z) + \text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Доведення: За теоремою про лишки

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=a_k} f(z),$$

де γ охоплює всі особливі точки. З іншого боку,

$$\oint_{\gamma^{-1}} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=\infty} f(z),$$

що і доводить теорему.

8. Елементи функціонального аналізу

Зараз ми введемо ті поняття і твердження функціонального аналізу, що знадобляться у подальшому, а також домовимося відповідно термінології і позначень.

8.1. Лінійні простори

Множина елементів будь-якої природи, для якої можна виділити лінійні метричні або геометричні властивості, що притаманні звичайному тривимірному простору називають **простором (математичним простором, абстрактним простором)**.

В залежності від того, які властивості виділяються, поділяють і простори.

Множина $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ називається **лінійним простором**, якщо для його елементів виділені операції додавання та множення на число, які підпорядковані наступним аксіомам (правилам).

- Для додавання:

1. $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ (комутативність додавання);
2. $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ (асоціативність додавання);
3. існує єдиний елемент $0 \in \mathbb{X}$, такий що $x_i + 0 = x_i$, $\forall x_i \in \mathbb{X}$, який зветься **нульовим елементом**;
4. кожному елементу $x_i \in \mathbb{X}$ відповідає єдиний **протилежний** елемент $-x_i \in \mathbb{X}$, такий що $x_i + (-x_i) = 0$.

- Для множення на числа α і β , які в загальному випадку можуть бути комплексними:

1. $\alpha(\beta x_i) = (\alpha\beta)x_i$, $\forall x_i \in \mathbb{X}$ (асоціативність множення);
2. $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$ (закон дистрибутивності множення);
3. $(\alpha + \beta)x_i = \alpha x_i + \beta x_i$, $\forall x_i \in \mathbb{X}$ (закон дистрибутивності множення);
4. існує єдиний елемент з множини $\mathbb{X}$, який має назву **одиничного**, такий що $1 \cdot x_i = x_i$, $\forall x_i \in \mathbb{X}$.

Зауважимо, що замість «лінійний простір» часто говорять просто «простір», або «векторний простір», бо при лінійних перетвореннях додавання і множення на число вектор переходить у вектор.

Елементи лінійного простору називають **векторами** або **точками** залежно від їх природи.

В лінійних просторах вводять поняття лінійної незалежності векторів.

Якщо рівність $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ можлива тільки у тривіальному випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то систему векторів $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ називають **лінійно незалежною**. Якщо хоча б один з λ_i відмінний від 0, система — лінійно залежна.

Введення поняття лінійного простору, а разом із ним поняття лінійної залежності, дозволяє говорити про базис простору.

Усяка впорядкована система лінійно незалежних векторів називається **базисом векторного простору**, якщо кожен вектор $x_i \in \mathbb{X}$ є лінійною комбінацією векторів цієї системи $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$.

Максимальне число лінійно незалежних векторів, що утворює базис називається **розмірністю простору** ($\dim \mathbb{X} = n$). Якщо n — скінченне, то простір **скінченновимірний**. У випадку скіль завгодно великого числа — **нескінченновимірний**³⁰.

|| Висновок: лінійний або векторний простір — це простір з базисом, через який можна представити будь-який вектор з цього простору.

8.2. Метричний простір

Для того, щоб розглядати збіжність послідовностей необхідно ввести поняття відстані між точками простору, а це робиться за допомогою метрики.

|| Множина $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ елементів будь-якої природи називається **метричним простором**, якщо кожній парі елементів $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ поставимо у відповідність число $\rho(x_1, x_2)$, яке називається *відстанню між цими елементами* або **метрикою простору $\mathbb{X}$** (іноді кажуть метрикою на $\mathbb{X}$).

Метрика вводиться наступними аксіомами:

1. $\rho(x_1, x_2) \geq 0$, $\rho(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 \equiv x_2$ (аксіома тотожності).
2. $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ (аксіома симетрії).
3. $\rho(x_1, x_3) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3)$ (нерівність трикутника).

За допомогою метрики вводиться поняття збіжності³¹ послідовності і границі послідовності.

|| Послідовність елементів $\{x_n\}$ метричного простору збігається до виділеного елементу $x_0 \in \mathbb{X}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знаходиться таке n_0 , що при $n \geq n_0$ $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Тобто $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Але частіше користуються іншою умовою з якої вилучений елемент x_0 : так як $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m)$, то $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$, що має назву **умови Коші**.

|| Послідовність для якої справджується умова Коші в літературі називають **фундаментальною** (послідовність «збігається в собі»).

Границя збіжної послідовності може належати даному простору або ні. Найбільш важливим є випадок, коли $x_0 \in \mathbb{X}$.

|| Метричний простір в якому кожна фундаментальна послідовність збігається до границі, яка є елементом цього ж простору називається **повним**.

Теорема 8..1 В кожному метричному просторі, відстань є неперервною функцією своїх аргументів, тобто якщо $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$, то $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x_0, y_0)$.

Доведення. Застосовуючи нерівність трикутника:

$$\begin{aligned}\rho(x_n, y_n) &\leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y_n). \\ \rho(x_0, y_0) &\leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_0).\end{aligned}$$

³⁰Множина всіх розв'язків рівняння $U^{(n)} + a_1(x)U^{(n-1)} + \dots + a_n U = 0$ з неперервними коефіцієнтами є n -вимірним векторним простором, так як будь-який розв'язок можна представити через фундаментальну систему.

³¹Коли кажуть «збіжність», треба завжди розуміти збіжність за метрикою даного простору.

Одержуємо:

$$\begin{aligned}\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0) &\leq \rho(x_n, x_0) + \rho(y_0, y_n). \\ \rho(x_0, y_0) - \rho(x_n, y_n) &\leq \rho(x_0, x_n) + \rho(y_n, y_0).\end{aligned}$$

Отже

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0).$$

Так як права частина прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$, то $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x_0, y_0)$. Таким чином:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \rho(x_0, y_0).$$

Сукупність точок метричного простору, яка задовольняє умові $\rho(x, a) < r$ називається **відкритим шаром** радіуса r з центром у точці a і позначається $S(a, r)$. Якщо $\rho(x, a) \leq r$, то $\bar{S}(a, r)$ — **замкнений шар**.

8.2.1 Евклідів простір $\mathbb{R}^n$

Евклідів простір $\mathbb{R}^n$ (координатний) — це множина для всіх упорядкованих систем з n дійсними числами. Якщо

$$X_k = \{\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}\}, \quad X_0 = \{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}\},$$

то відстань між точками визначається формулою:

$$\rho(X_k, X_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)})^2}.$$

Для збіжності послідовності $\{X_k\}$, маємо $\rho(X_k, X_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, що еквівалентно умові $\xi_i^{(k)} \rightarrow \xi_i^{(0)}$, $k \rightarrow \infty$. Таким чином в евклідовому просторі маємо «*координатну*» збіжність, тобто збіжність за координатами.

8.2.2 Простір Лебега $L_2[a, b]$

Елементами цього простору будуть функції інтегровні з квадратом (квадратично інтегровні), тобто підпорядковані умові:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Метрика у цьому просторі вводиться за правилом:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}, \quad \forall f, g \in L_2[a, b].$$

Тоді послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається до елемента $f_0(x)$, якщо

$$\rho(f_n, f_0) = \sqrt{\int_a^b |f_n - f_0|^2 dx} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Такий тип збіжності не приводить до «поточної» («покоординатної») збіжності, як у евклідовому просторі і має назву *збіжності у середньому*.

|| **Простором Лебега** називають простір, елементами якого будуть класи еквівалентних між собою квадратично інтегровних функцій, для яких додавання і множення на число визначаються як звичайні операції додавання і множення функцій.

Зміст

1. Комплексні числа	3
1.1. Система узагальнень	3
1.2. Прямі операції	4
1.3. Геометрична інтерпретація комплексних чисел	4
2. Елементарні функції	7
2.1. Обернені тригонометричні та обернені гіперболічні функції	7
2.2. Інтерпретація комплексних чисел за Ріманом	7
2.3. Однозначні вітки багатозначних функцій. Ріманова поверхня	8
3. Границя функції	10
3.1. Неперервність функції	10
3.2. Диференційовність функції	10
3.3. Геометричний зміст похідної	13
4. Криві та області	14
5. Інтеграл по комплексній змінній	15
5.1. Інтегрування по гладкій кривій	15
5.2. Найпростіші властивості інтеграла	16
5.3. Інтегральна теорема Коші	17
5.4. Узагальнення інтегральної теореми Коші на випадок багатозв'язних областей	19
5.5. Інтеграл типу Коші	19
5.6. Інтегральна формула Коші	21
5.7. Інтеграл і первісна комплексної функції	21
6. Ряди комплексної змінної	24
6.1. Числові ряди	24
6.2. Функціональні ряди	24
6.3. Степеневі ряди	25
6.3.1 Збіжність степеневих рядів	25
6.3.2 Визначення радіусу збіжності	25
6.3.3 Властивості степеневих рядів	26
6.4. Голоморфність функцій	27
6.4.1 Нулі голоморфної функції	28
6.4.2 Єдиність аналітичної функції	29
6.5. Принцип симетрії Рімана–Шварца	30
7. Ізольовані особливі точки	31
7.1. Ряд Лорана	31
7.2. Аналітичне продовження	33
7.3. Ізольовані особливі точки однозначного характеру	33
7.4. Теорія лишків	36
7.4.1 Лишки у скінченній точці	36
7.4.2 Знаходження лишків (у скінченній точці)	36
7.4.3 Лишок у нескінченності	37
7.4.4 Теореми про лишки	38

8. Елементи функціонального аналізу	39
8.1. Лінійні простори	39
8.2. Метричний простір	40
8.2.1 Евклідов простір $\mathbb{R}^n$	41
8.2.2 Простір Лебега $L_2[a, b]$	41