

Передмова

Даний посібник написаний на основі досвіду авторів, які протягом декількох років читали лекції з теорії функцій комплексної змінної та проводили практичні заняття на фізичному факультеті Дніпропетровського національного університету.

Зміст посібника — курс теорії функції комплексної змінної, тобто той матеріал, який складає ядро і є основою методів теоретичної фізики. Рівень викладення відповідає рівню фізико-математичних спеціальностей ВНЗ, проте автори сподіваються, що посібник буде корисним студентам усіх природничих і технічних спеціальностей, навчання яких передбачає ґрунтовну математичну підготовку.

Посібник призначений для тих, хто починає вивчати даний курс, тому в кожному із його розділів наведені основні теоретичні поняття та приклади розв'язання типових задач. У посібнику подані задачі за всіма розділами курсу теорії функцій комплексної змінної, які включені в навчальні програми ВНЗ напрямків підготовки "Фізика" і "Прикладна фізика". Крім традиційних розділів приділена увага і таким важливим для застосування в курсах теоретичної фізики і в курсах за спеціальністю розділам, як "Головне значення інтегралів за Коші" і "Дисперсійні співвідношення".

Основна мета посібника — активізувати самостійну роботу студентів шляхом індивідуалізації завдань. Уміщені задачі дозволяють запропонувати кожному студенту індивідуальне завдання з усіх розділів теорії функцій комплексної змінної й розраховані на академічну групу на двадцять студентів. Номери задач, які складають індивідуальні завдання, зібрані в таблицю, розміщену в кінці видання.

Виконані завдання захищаються студентом частинами за графіком, складеним викладачем. Під час захисту перевіряються теоретичні знання студента, а також уміння і навички застосовувати їх для розв'язання задач.

У кінці посібника наведений список літератури, що буде корисним для поглибленого вивчення курсу теорії функцій комплексної змінної.

1. Числа, криві та області на комплексній площині

Комплексним числом z називається вираз вигляду $z = x + iy$ (алгебрична форма комплексного числа), де x і y — дійсні числа, а i — уявна одиниця, що задовольняє умову $i^2 = -1$. Числа x і y називаються відповідно **дійсною** та **уявною** частинами комплексного числа z і позначаються як $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Отже, комплексне число задається парою дійсних чисел x і y . Тому числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Операції над комплексними числами

Сумою $z_1 + z_2$ чисел z_1 і z_2 називається комплексне число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Різницею $z_1 - z_2$ чисел z_1 і z_2 називається комплексне число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Добутком $z_1 \cdot z_2$ чисел z_1 і z_2 називається комплексне число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Часткою z_1/z_2 від ділення комплексного числа z_1 на комплексне число $z_2 \neq 0$ називається комплексне число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Легко перевірити, що введені операції додавання і множення комплексних чисел задовольняють закони арифметики дійсних чисел, тому для комплексних чисел будуть застосовними звичайні формули алгебри.

Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається **спряженим** із комплексним числом $z = x + iy$, причому

$$(\overline{z_1 + z_2}) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad (\overline{z_1 \cdot z_2}) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{(\bar{z})} = z.$$

Дійсна частина $\operatorname{Re} z$ і уявна частина $\operatorname{Im} z$ числа z виражаються через спряжені комплексні числа як

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Комплексне число $z = x + iy$ зображується на площині XOY точкою M з координатами (x, y) або вектором, початок якого знаходиться в точці $O(0, 0)$, а кінець — у точці $M(x, y)$. Довжина ρ вектора OM називається **модулем** комплексного числа і позначається як $|z|$, так що $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Очевидно, що $|\bar{z}| = |z|$. Крім того, справджуються формули $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Полярний кут φ , утворений вектором OM з віссю OX , називається **аргументом** комплексного числа z і позначається як $\varphi = \text{Arg } z$.

Аргумент визначається не однозначно, а з точністю до $2\pi k$:

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де $\arg z$ — головне значення $\text{Arg } z$, і задовольняє умову $-\pi < \arg z \leq \pi$ або

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2\pi k, & \text{I та IV квадрант;} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi + 2\pi k, & \text{II та III квадрант.} \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} \text{II} & \text{I} \\ \hline \text{III} & \text{IV} \end{array}$$

Аргумент вважається додатним, якщо поворот додатної частини дійсної осі навколо початку до збігу з напрямком вектора OM відбувається проти годинникової стрілки, і від'ємним — при повороті за годинниковою стрілкою.

Мають місце такі співвідношення:

$$\text{tg}(\text{Arg } z) = \frac{y}{x}, \quad \cos(\text{Arg } z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\text{Arg } z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Два комплексних числа z_1 і z_2 рівні тоді й тільки тоді, коли їх модулі рівні, а їх аргументи або рівні, або відрізняються на величину, кратну 2π :

$$|z_1| = |z_2|, \quad \text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2 + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Будь-яке комплексне число $z = x + iy$ ($z \neq 0$) можна записати як у тригонометричній формі

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

так і в показниковій (або експоненціальній) формі

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

де введено позначення $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (**формула Ейлера**).

Якщо два комплексних числа z_1 і z_2 задані в тригонометричній формі $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, їх добуток знаходиться за формулою

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

У той же час для частки маємо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Звідси випливає, що *аргументи комплексних чисел при множенні додаються, а при діленні — віднімаються.*

Тому піднесення комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ до натурального степеня n здійснюється за формулою

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad \text{Arg } z^n = n \text{Arg } z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тобто справджується **формула Муавра**

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Аналогічно, корінь n -го степеня з комплексного числа z розглядається як піднесення до степеня $1/n$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right),$$

де $k = 0, 1, 2, \dots; n - 1$.

Отже, корінь n -го степеня має рівно n різних значень. Тому при алгебричних діях із членами вигляду $z^{m/n}$ відношення m/n повинне розглядатися як нескоротний дріб.

1.1. Арифметичні дії з комплексними числами

Завдання: для комплексного числа знайти дійсну та уявну частини, модуль та аргумент.

Приклад 1.1

Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. Оскільки $x = -\sin \frac{\pi}{8} < 0$, $y = -\cos \frac{\pi}{8} < 0$, точка z належить третьому квадранту. Тоді для головного значення аргументу матимемо

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right) = \pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = \pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{11}{8}\pi,$$

а повний аргумент дорівнюватиме

$$\operatorname{Arg} z = \frac{11}{8}\pi + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Модуль числа z знайдемо за формулою

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1.$$

Рекомендації до виконання: при знаходженні дійсних та уявних частин комплексних чисел слід спочатку позбутися всіх степенів уявної одиниці. Потім позбутися комплексних чисел у знаменнику, множачи чисельник і знаменник дробу на число, спряжене знаменнику. Далі здійснити елементарні алгебричні перетворення, для зведення числа до вигляду $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Знайдених уявної та дійсної частин буде достатньо для знаходження модуля і аргументу комплексного числа і подальшого зображення його в експоненціальній або тригонометричній формі.

$$1.1.1. \quad \left(\frac{1 + 2i^{36}}{3 - 4i^{73}} \right).$$

$$1.1.2. \quad \left(5 - 4i + \frac{3}{2} \right)^2.$$

$$1.1.3. \quad \frac{1}{i} - \frac{1-i}{1+i} - \frac{2}{1-3i}.$$

$$1.1.4. \quad \frac{1 + 2i^2 - 3i^3 + 4i^4 - 5i^5}{10}.$$

$$1.1.5. \quad \left(\frac{\frac{1}{2} - i^{34}}{i - i^7} \right)^3.$$

$$1.1.6. \quad \frac{1}{7}i + (i^2 + 2i^5 - 3i^{90})^2.$$

$$1.1.7. \quad \frac{1}{2}i^{10} + \frac{2}{3}i^8 + \frac{3}{4}i^6 + \frac{4}{5}i^4.$$

$$1.1.8. \quad \frac{2i - 3 + \frac{i}{i^{109}}}{-1 + i^{33}}.$$

$$1.1.9. \quad \frac{(1+i)(3-2i)}{-i + \frac{2}{i}}.$$

$$1.1.10. \quad \frac{1 + i^{67}}{3} - \frac{i^{214}}{1 + 2i}.$$

$$1.1.11. \quad \frac{-i}{5} + \left(\frac{i^{157}}{1+i} \right)^3.$$

$$1.1.12. \quad \left(\frac{2+3i}{i} \right)^3.$$

$$1.1.13. \quad \frac{i^{432} - i^{987}}{i^{234} + i^{789}} - 1.$$

$$1.1.14. \quad \left(\frac{-i^{432} + \frac{1}{3}}{-1 - i} \right)^3.$$

$$1.1.15. \quad \frac{1}{i^5 + 2i^4 - 3i^3 + 4i^2 - 5i}.$$

$$1.1.16. \quad \left(\frac{i+1}{-\frac{1}{i} + 2} \right)^2.$$

$$1.1.17. \quad \frac{(-3 + i^{101})^2}{i - i^2 + i^{-3}}.$$

$$1.1.18. \quad \frac{i^{222} + 2}{-i} - \frac{-10}{1 - 2i}.$$

$$1.1.19. \quad \frac{(i^{99} - i^{17})^{-2}}{i - i^{-36}} - \frac{3}{2}.$$

$$1.1.20. \quad 1 - \frac{1}{i^{10}} + \frac{1}{i^{20}} - \frac{1}{i^{30}} + \frac{1}{i^{40}} - \frac{1}{i^{50}}.$$

Приклад 1.2

Записати комплексне число $z = (1 + i)(1 + i\sqrt{3})$ у тригонометричній і експоненціальній формах.

Розв'язання. Запишемо $z = z_1 \cdot z_2$, де $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Для чисел z_1 і z_2 знайдемо модулі й аргументи:

$$|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad |z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Оскільки числа z_1 і z_2 належать першому квадранту

$$\arg z_1 = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_2 = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Зважаючи на те, що при множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи додаються, матимемо

$$|z| = |z_1| \cdot |z_2| = 2\sqrt{2}, \quad \arg z = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}.$$

Отже,

$$z = (1 + i)(1 + i\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k \right) \right),$$

або

$$z = 2\sqrt{2} e^{i \left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k \right)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Завдання: записати комплексне число z у тригонометричній і експоненціальній формах.

$$1.1.21. \quad z = (-1 - i)(1 + i\sqrt{3}).$$

$$1.1.24. \quad z = -2(-1 - \sqrt{3}i)^3.$$

$$1.1.22. \quad z = (1 - i\sqrt{3})^4.$$

$$1.1.25. \quad z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

$$1.1.23. \quad z = (-1 + i\sqrt{3})^2.$$

$$1.1.26. \quad z = -22.$$

$$1.1.27. \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$1.1.28. \quad z = \frac{1}{3i}.$$

$$1.1.29. \quad z = (1 + i)^{16}.$$

$$1.1.30. \quad z = \frac{1 - i}{1 + i}.$$

$$1.1.31. \quad z = \frac{1}{1 - i^5}.$$

$$1.1.32. \quad z = (1 - i\sqrt{3})^4.$$

$$1.1.33. \quad z = \frac{1}{-2i^6}.$$

$$1.1.34. \quad z = (1 + i)^{121}.$$

$$1.1.35. \quad z = (\sqrt{3} + i)^{126}.$$

$$1.1.36. \quad z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}.$$

$$1.1.37. \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{5}}{2}.$$

$$1.1.38. \quad z = \sin \alpha - i \cos \alpha.$$

$$1.1.39. \quad z = -i.$$

$$1.1.40. \quad z = \frac{5 + 3i\sqrt{3}}{i}.$$

Завдання: довести рівність (тотожність).

$$1.1.41. \quad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

$$1.1.46. \quad \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$1.1.42. \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

$$1.1.47. \quad \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$1.1.43. \quad |\bar{z}| = |z|.$$

$$1.1.48. \quad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n.$$

$$1.1.44. \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z.$$

$$1.1.49. \quad \bar{z} \cdot z = |z|^2.$$

$$1.1.45. \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$1.1.50. \quad \overline{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)} = z_1 + z_2.$$

1.2. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Завдання: геометрично побудувати числа на комплексній площині.

Рекомендації до виконання: при виконанні нижчеподаних завдань слід геометрично побудувати шукані числа на комплексній площині, записати їх в експоненціальній або тригонометричній формі й виконати необхідні алгебричні операції.

1.2.1. На комплексній площині знайти число z , що є точкою відрізка між z_1 та z_2 , яка знаходиться від z_2 вдвічі далі, ніж від z_1 .

1.2.2. У який вектор перейде вектор $z = a + ib$ при дзеркальному відображенні відносно бісектриси першого квадранта?

1.2.3. У який вектор перейде вектор $z = 3i - \sqrt{3}$ після повороту його на кут 90° ?

1.2.4. У який вектор перейде вектор $z = -i - \sqrt{3}$ після повороту його на кут 120° ?

1.2.5. Знайти кут, на який треба повернути вектор $z_1 = 4 - 3i$, щоб він перейшов у вектор $z_2 = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$.

1.2.6. Знайти кут, на який треба повернути вектор $z_1 = 3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$, щоб він перейшов у вектор $z_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$.

1.2.7. Знайти кут, на який треба повернути вектор $z_1 = i - 5$, щоб отримати вектор $z_2 = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$.

1.2.8. Знайти вектор, у який перейде вектор $z = 3 + 4i$ після його збільшення вдвічі й повороту на 45° .

1.2.9. Центр квадрата знаходиться в точці $z_0 = 1 + i$, одна з його вершин — у точці $z_1 = 1 - i$. У яких точках знаходяться інші вершини квадрата?

1.2.10. Нехай $z_1, z_2, \dots, z_n$ — корені рівняння $z^n - 1 = 0$ ($n > 1$). Довести, що $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.

Завдання: довести нерівність геометричним шляхом і визначити, коли має місце рівність.

$$1.2.11. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad 1.2.12. \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Завдання: довести нерівність алгебричним шляхом і визначити, коли має місце рівність.

$$1.2.13. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad 1.2.14. \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Завдання: довести нерівність.

$$1.2.15. \quad \left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg z|. \quad 1.2.16. \quad |z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\arg z|.$$

Завдання: довести тотожність.

$$1.2.17. \quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

$$1.2.18. \quad |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2.$$

$$1.2.19. \quad |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = \left| z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2} \right| + \left| z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2} \right|.$$

$$1.2.20. \quad \left| z + \frac{1}{2} \right|^2 + i \left| z + \frac{i}{2} \right|^2 - (1 + i)|z|^2 - \frac{1}{4}(1 + i) = z.$$

1.3. Корінь n -го степеня

Завдання: обчислити значення кореня.

Приклад 1.3

Знайти всі значення $\sqrt[4]{1-i}$.

Розв'язання. Зведемо комплексне число $1-i$ до тригонометричного вигляду

$$1-i = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Отже, за формулою Муавра

$$\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2} \left[\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} \right) \right].$$

Обираючи значення $k = 0, 1, 2, 3$, знайдемо

$$\begin{aligned} (k=0) \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} - i \sin \frac{\pi}{16} \right), \\ (k=1) \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16} \right), \\ (k=2) \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{16} + i \sin \frac{15\pi}{16} \right), \\ (k=3) \quad \sqrt[4]{1-i} &= \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{16} + i \sin \frac{23\pi}{16} \right). \end{aligned}$$

1.3.1. $\sqrt[7]{i}$.

1.3.8. $\sqrt[5]{32i}$.

1.3.15. $\sqrt[7]{(1-i)^5}$.

1.3.2. $\sqrt[3]{125i}$.

1.3.9. $\sqrt[3]{1-i}$.

1.3.16. $\sqrt[4]{i + \sqrt{3}}$.

1.3.3. $\sqrt[3]{64i^5}$.

1.3.10. $\sqrt[3]{8-6i}$.

1.3.17. $\sqrt[7]{i^{37}}$.

1.3.4. $\sqrt[8]{-i^9}$.

1.3.11. $\sqrt[3]{3-4i}$.

1.3.18. $\sqrt[7]{(1-i)^5}$.

1.3.5. $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$.

1.3.12. $\sqrt[6]{-i^{21}}$.

1.3.19. $\sqrt[5]{(-1-\sqrt{3}i)^3}$.

1.3.6. $\sqrt[4]{-64}$.

1.3.13. $\sqrt[4]{i + \sqrt{3}}$.

1.3.20. $\sqrt[5]{(-1-\sqrt{3}i)^3}$.

1.3.7. $\sqrt[3]{i-1}$.

1.3.14. $\sqrt[7]{i^{37}}$.

1.4. Рівняння в комплексних змінних

Завдання: розв'язати рівняння і позначити розв'язки точками на комплексній площині.

Приклад 1.4

Розв'язати рівняння $(2 - i)x + (1 + 2i)y = 3 + i$.

Розв'язання. Розкриємо дужки і відокремимо дійсні та уявні числа в лівій частині

$$2x + y + i(-x + 2y) = 3 + i.$$

Оскільки рівність комплексних чисел означає рівність їх дійсних і уявних частин, матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $x = 1$, $y = 1$, $z = x + iy = 1 + i$.

Приклад 1.5

Розв'язати рівняння $z^6 + 1 + i = 0$.

Розв'язання. Задача зводиться до обчислення коренів $\sqrt[6]{-1 - i}$. Спочатку знайдемо модуль і аргумент числа $(-1 - i)$: $|-1 - i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1 - i) = \pi + \arctg \frac{y}{x} = \frac{5\pi}{4}$. За формулою Муавра

$$z_k = \sqrt[6]{-1 - i} = \sqrt[12]{2} e^{i \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{3} \right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Рекомендації до виконання: при розв'язанні нижчеподаних рівнянь слід розуміти, що рівність двох комплексних чисел потребує рівності їх дійсних та уявних частин. Крім того, корені n -степеня знаходяться у вершинах правильного n -кутника, з центром у початку координат.

1.4.1. $z^6 = 64$.

1.4.7. $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$.

1.4.2. $z^7 + 1 = 0$.

1.4.8. $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$.

1.4.3. $\bar{z} = z^3$.

1.4.9. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

1.4.4. $|z| - z = 1 + 2i$.

1.4.10. $\cos x + i \sin x = \sin x + i \cos x$.

1.4.5. $z^8 + 2\sqrt{3}z^4 + 4 = 0$.

1.4.11. $2|z| - 3z = 1 - 2i$.

1.4.6. $z^2 + i = 0$.

1.4.12. $z^2 + 2 - i = 0$.

$$1.4.13. \quad z^5 + 32 = 0.$$

$$1.4.17. \quad z^6 - 3z^3 + 11 = 0.$$

$$1.4.14. \quad z^8 - 2z^4 + 2 = 0.$$

$$1.4.18. \quad (1 + 3i)x - (2 - 5i)y = i^3.$$

$$1.4.15. \quad z^4 + 81 = 0.$$

$$1.4.19. \quad z^9 + 256i = 0.$$

$$1.4.16. \quad 3|z| + 5z + 6\bar{z} = 2 - 3i.$$

$$1.4.20. \quad (i^7 - 1)x - iy = -1 + i^5.$$

1.5. Криві на комплексній площині

Завдання: визначити вид кривої на комплексній площині.

Приклад 1.6

Яка крива визначається рівнянням $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{4}$?

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$. Маємо

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{\left(\frac{1}{z} \right) + \overline{\left(\frac{1}{z} \right)}}{2} = \frac{\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Згідно з умовою $\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}$ маємо $x^2 + y^2 - 4x = 0$, що є рівнянням кола радіуса 2 із центром у точці (2,0): $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Рекомендації до виконання: при знаходженні рівняння кривої слід зобразити задану ліву частину рівності через $\operatorname{Re} z = x$ і $\operatorname{Im} z = y$ і, застосувавши рівність двох комплексних чисел, одержати аналітичний вираз $y = f(x)$, який і задає криву на комплексній площині.

$$1.5.1. \quad \operatorname{Re} \frac{z - 1}{z + 1} = 0.$$

$$1.5.8. \quad \operatorname{Im} \frac{z - a}{z + a} = 0.$$

$$1.5.2. \quad \operatorname{Re} \frac{z - a}{z + a} = 0.$$

$$1.5.9. \quad \operatorname{Re} \frac{1}{z} = C, \quad -\infty < C < \infty.$$

$$1.5.3. \quad \operatorname{Re} \frac{z - 2}{z + 2} = 0.$$

$$1.5.10. \quad \operatorname{Im} \frac{1}{z} = C, \quad -\infty < C < \infty.$$

$$1.5.4. \quad \operatorname{Im} \frac{z - 2}{z + 2} = 0.$$

$$1.5.11. \quad \operatorname{Re} z^2 = C, \quad -\infty < C < \infty.$$

$$1.5.5. \quad \operatorname{Re} \frac{z - 3}{z + 3} = 0.$$

$$1.5.12. \quad \operatorname{Im} z^2 = C, \quad -\infty < C < \infty.$$

$$1.5.6. \quad \operatorname{Im} \frac{z - 5}{z + 5} = 0.$$

$$1.5.13. \quad \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \lambda, \quad \lambda > 0.$$

$$1.5.7. \quad \operatorname{Re} \frac{z - 4}{z + 4} = 0.$$

$$1.5.14. \quad \arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha, \quad -\pi < \alpha \leq \pi.$$

$$1.5.15. \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1.$$

$$1.5.18. \quad |z\bar{z} - i| = \operatorname{Re}(z - 1) + 1.$$

$$1.5.16. \quad \operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0.$$

$$1.5.19. \quad \left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1.$$

$$1.5.17. \quad \operatorname{Re}(1 + z) - |z| = 0.$$

$$1.5.20. \quad \left| \frac{z + i}{z - i} + i \right| = 2.$$

Завдання: визначити криву, записану в параметричній формі.

Приклад 1.7

Визначити вид кривої $\frac{1+t}{1-t} + i\frac{2+t}{2-t}$, записаної в параметричній формі.

Розв'язання. Для знаходження виду кривої $y = f(x)$ запишемо систему

$$\frac{1+t}{1-t} + i\frac{2+t}{2-t} = x + iy \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+t}{1-t} = x, \\ \frac{2+t}{2-t} = y. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи знайдемо залежність $t = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ і підставимо у друге рівняння, звідси і знайдемо шукане рівняння гіперболи

$$y = \frac{3x+1}{x+3} = 3 - \frac{8}{x+3}.$$

Рекомендації до виконання: у даних рівностях слід виділити дійсні й уявні частини z , зображені в параметричній формі $x = x(t)$ і $y = y(t)$, і побудувати залежності $y = f(x)$.

$$1.5.21. \quad z = 3 \sec t + 2i \operatorname{tg} t.$$

$$1.5.30. \quad z = 2e^{2it} - \frac{1}{e^{2it}}.$$

$$1.5.22. \quad z = -\sec t + 3i \operatorname{tg} t.$$

$$1.5.31. \quad z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4).$$

$$1.5.23. \quad z = 3 \operatorname{tg} t + 4i \sec t.$$

$$1.5.32. \quad z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1).$$

$$1.5.24. \quad z = -4 \operatorname{tg} t - 2i \sec t.$$

$$1.5.33. \quad z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4).$$

$$1.5.25. \quad z = \operatorname{ctg} t - 2i \operatorname{cosec} t.$$

$$1.5.34. \quad z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1).$$

$$1.5.26. \quad z = 3 \operatorname{ch} 2t + 2i \operatorname{sh} 2t.$$

$$1.5.35. \quad z = -\sec t + 2i \operatorname{tg} t.$$

$$1.5.27. \quad z = 5 \operatorname{sh} 4t + 4i \operatorname{ch} 4t.$$

$$1.5.36. \quad z = -5 \operatorname{tg} t + 5i \sec t.$$

$$1.5.28. \quad z = -4 \operatorname{sh} 5t - 5i \operatorname{ch} 5t.$$

$$1.5.37. \quad z = i \sec t - 2 \operatorname{tg} t.$$

$$1.5.29. \quad z = \frac{2}{\operatorname{ch} 2t} + 4i \operatorname{th} 2t.$$

$$1.5.38. \quad z = \operatorname{tg} t + 3i \sec t.$$

$$1.5.39. \quad z = \operatorname{th} 5t + \frac{5i}{\operatorname{ch} 5t}.$$

$$1.5.40. \quad z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}.$$

1.6. Области на комплексній площині

Завдання: визначити, яку область описує нерівність.

Приклад 1.8

Яка множина точок на комплексній площині відповідає умові $\operatorname{Im} z^2 > 2$?

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$. Тоді

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy.$$

Тобто $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. Згідно з умовою $2xy > 2$ маємо $xy > 1$, що описує множину точок у першому та третьому квадрантах, над і під гіперболою $xy = 1$.

Приклад 1.9

Яку область описує нерівність $|z| + \operatorname{Re} z < 1$?

Розв'язання. Нехай $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тоді $|z| = \rho$, $\operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi$.

Згідно з умовою $\rho + \rho \cos \varphi < 1$ маємо $\rho < \frac{1}{1 + \cos \varphi}$.

Цю нерівність задовольняють усі точки, що належать внутрішності замкненої кривої $\rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$, яка є параболою, записаною в полярних координатах.

$$1.6.1. \quad |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 2, \operatorname{Im} z \geq 3. \quad 1.6.10. \quad |z + 1| \geq 1, |z + i| < 1.$$

$$1.6.2. \quad |z - i| \geq 1. \quad 1.6.11. \quad |z + 1| < 1, |z - i| \leq 1.$$

$$1.6.3. \quad 0 \leq |z + i| < 2. \quad 1.6.12. \quad |z + i| \leq 2, |z - i| > 2.$$

$$1.6.4. \quad |\pi - \arg z| \geq \frac{\pi}{4}. \quad 1.6.13. \quad |z + i| < 2, 0 < \operatorname{Re} z \leq 1.$$

$$1.6.5. \quad 1 \leq |z + i| \leq 2. \quad 1.6.14. \quad |z - i| \leq 2, 0 < \operatorname{Im} z < 2.$$

$$1.6.6. \quad |z - i| < 1, -1 \leq \operatorname{Re} z < 1. \quad 1.6.15. \quad |z| \leq 1, \arg(z + i) > \frac{\pi}{4}.$$

$$1.6.7. \quad 1 < |z + 1| \leq 2. \quad 1.6.16. \quad |\operatorname{Re} z| \leq 1, |\operatorname{Im} z| < 2.$$

$$1.6.8. \quad |z - 1| \leq 1, |z + 1| > 2. \quad 1.6.17. \quad |z - i| \leq 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

$$1.6.9. \quad |z + i| \geq 1, |z| < 2. \quad 1.6.18. \quad z\bar{z} < 2, \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

$$1.6.19. \quad |z - i| \leq 2, \operatorname{Re} z > 1. \qquad 1.6.20. \quad z\bar{z} \leq 2, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

Завдання: записати в комплексній формі рівняння для області.

- 1.6.21. Перший квадрант комплексної площини.
- 1.6.22. Другий квадрант комплексної площини.
- 1.6.23. Третій квадрант комплексної площини.
- 1.6.24. Півкруг радіуса 1 (без кола) із центром у точці $z = 0$, розташований ліворуч від осі $\operatorname{Im} z$.
- 1.6.25. Півкруг радіуса 2 (без кола) із центром у точці $z = 1$, розташований праворуч від осі $\operatorname{Im} z$.
- 1.6.26. Півплощина, розташована ліворуч від осі $\operatorname{Im} z$.
- 1.6.27. Півплощина, що розташована вище осі $\operatorname{Re} z$ і складається з точок, які віддалені від осі $\operatorname{Re} z$ на відстань не меншу ніж 2.
- 1.6.28. Півплощина, що розташована нижче осі $\operatorname{Re} z$ і складається з точок, які віддалені від осі $\operatorname{Re} z$ на відстань не меншу ніж 3.
- 1.6.29. Півплощина, розташована праворуч від осі $\operatorname{Im} z$.
- 1.6.30. Півплощина, розташована ліворуч від осі $\operatorname{Im} z$.
- 1.6.31. Півплощина, що розташована вище осі $\operatorname{Re} z$ і складається з точок, які віддалені від осі $\operatorname{Re} z$ на відстань не меншу ніж 4.
- 1.6.32. Півплощина, що розташована нижче осі $\operatorname{Re} z$ і складається з точок, які віддалені від осі $\operatorname{Re} z$ на відстань не більшу 3.
- 1.6.33. Полоса, що складається із точок, віддалений від осі $\operatorname{Re} z$ на відстань не більшу 2.
- 1.6.34. Полоса, що складається з точок, які віддалені від осі $\operatorname{Im} z$ на відстань не меншу ніж 1.
- 1.6.35. Полоса, що складається з точок, які віддалені від осі $\operatorname{Re} z$ на відстань не більшу 2.
- 1.6.36. Область, що складається із точок, які знаходяться праворуч від уявної осі на відстані не меншій 2 і знизу від дійсної осі на відстані не більше 3.
- 1.6.37. Область, що складається із точок, які знаходяться ліворуч від уявної осі на відстані не меншій 3 і не більшій 1.
- 1.6.38. Область, що складається із точок, які знаходяться від обох осей на відстані не більшій 3.
- 1.6.39. Область, що складається із точок, які знаходяться від обох осей

на відстані не більшій 4 і не меншій 3.

1.6.40. Область, що складається з точок, які знаходяться від обох осей на відстані не меншій 1.

2. Елементарні функції комплексної змінної

2.1. Тригонометричні та гіперболічні функції

Значення **показникової функції** комплексної змінної $z = x + iy$ обчислюють за формулою

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Показникова функція e^z має такі властивості:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

де z_1 й z_2 – будь-які комплексні числа;

$$e^{z+2\pi ki} = e^z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

тобто e^z — періодична функція з основним періодом $2\pi i$.

Тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ виражаються через показникову:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Функції $\sin z$ і $\cos z$ – періодичні з дійсним періодом 2π і мають тільки дійсні нулі $z = \pi k$ та $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) відповідно.

Функції $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ визначаються рівностями

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для тригонометричних функцій комплексної змінної залишаються правильними усі відомі формули тригонометрії.

Гіперболічні функції $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ визначаються рівностями

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Мають місце тотожності $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$.

Завдання: знайти значення тригонометричних та гіперболічних функцій.

Приклад 2.1

Обчислити значення $\sin(5 - i)$.

Розв'язання

$$\begin{aligned}\sin(5 - i) &= \frac{1}{2i} [e^{1+5i} - e^{-1-5i}] = -\frac{i}{2} [e(\cos 5 + i \sin 5) - e^{-1}(\cos 5 - i \sin 5)] = \\ &= \frac{e + e^{-1}}{2} \sin 5 - i \frac{e - e^{-1}}{2} \cos 5 = \sin 5 \operatorname{ch} 1 - i \cos 5 \operatorname{sh} 1.\end{aligned}$$

Рекомендації до виконання: при обчисленні значень кругових та гіперболічних функцій слід застосовувати відомі з курсу тригонометрії формули синусів, косинусів, тангенсів та котангенсів для сум та різниць їх аргументів. Наприклад, $\cos(3 - 5i) = \cos(\alpha - \beta) = \cos 3 \cos(5i) + \sin 3 \sin(5i)$. Обчислення значень одержаних функцій від уявних чисел слід здійснювати через показникову функцію: $\cos(5i) = \frac{e^{-5} + e^5}{2} = \operatorname{ch} 5$, $\sin(5i) = \frac{e^{-5} - e^5}{2i} = i \operatorname{sh} 5$.

- | | | |
|--|--|--|
| 2.1.1. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right).$ | 2.1.13. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right).$ | 2.1.24. $\operatorname{ch}\left(1 + \frac{\pi i}{3}\right).$ |
| 2.1.2. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right).$ | 2.1.14. $\operatorname{ctg} \pi i.$ | 2.1.25. $\operatorname{ch}(1 - \pi i).$ |
| 2.1.3. $\operatorname{tg} \pi i.$ | 2.1.15. $\sin(\pi + i \ln 2).$ | 2.1.26. $\operatorname{ch}\left(2 - \frac{\pi i}{6}\right).$ |
| 2.1.4. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2i\right).$ | 2.1.16. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right).$ | 2.1.27. $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\right).$ |
| 2.1.5. $\sin \pi i.$ | 2.1.17. $\sin(\pi - i \ln 2).$ | 2.1.28. $\operatorname{th} \pi i.$ |
| 2.1.6. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right).$ | 2.1.18. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right).$ | 2.1.29. $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right).$ |
| 2.1.7. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right).$ | 2.1.19. $\operatorname{sh}\left(2 + \frac{\pi i}{4}\right).$ | 2.1.30. $\operatorname{th} \frac{1}{i - 2}.$ |
| 2.1.8. $\cos \pi i.$ | 2.1.20. $\operatorname{sh}(2 - 3i).$ | 2.1.31. $\operatorname{sh}\left(i - i^7 + \frac{i}{4}\right).$ |
| 2.1.9. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - i\right).$ | 2.1.21. $\operatorname{sh}\left(3 + \frac{\pi i}{6}\right).$ | 2.1.32. $\operatorname{cth}(2 + i).$ |
| 2.1.10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5i\right).$ | 2.1.22. $\operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{3}\right).$ | 2.1.33. $\operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi i}{2}\right).$ |
| 2.1.11. $\cos(2 + i).$ | 2.1.23. $\operatorname{sh}(2 - \pi i).$ | 2.1.34. $\operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}.$ |
| 2.1.12. $\sin 2i.$ | | |

$$\begin{array}{lll}
2.1.35. & \operatorname{tg}(2-i). & 2.1.37. \quad \operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right). \quad 2.1.39. \quad \operatorname{ch}\left(1-\frac{1}{i^2}\right). \\
2.1.36. & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right). & 2.1.38. \quad \operatorname{ch}\left(2+\frac{\pi i}{2}\right). \quad 2.1.40. \quad \operatorname{th}(2i-1).
\end{array}$$

2.2. Логарифмічна та обернені тригонометричні й гіперболічні функції

Логарифмічна функція $\operatorname{Ln} z$, де $z \neq 0$, визначається як функція, обернена до показникової, причому

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Значення функції при $k = 0$ називають **головним значенням логарифма** і позначають як $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Логарифмічна функція має такі властивості:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

Причому не слід забувати, що $\operatorname{Ln} z$ — багатозначна функція, значення якої утворюють множину. Тому $\operatorname{Ln} z^2 = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \neq 2 \operatorname{Ln} z$, тобто

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z + 2\pi k i, \quad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ визначаються як **обернені** до функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ відповідно. Так, якщо $z = \cos \omega$, то ω називається арккосинусом числа z і позначається $w = \operatorname{Arccos} z$. Усі ці функції багатозначні й виражаються через логарифмічну функцію:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2}), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}).$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}.$$

Обернені функції, що відповідають головному значенню логарифма, позначаються тими ж символами з малої літери ($\operatorname{arcsin} z$, $\operatorname{arccos} z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$) і називаються **головними значеннями**.

Обернені гіперболічні функції $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ і $\operatorname{Arcth} z$ називаються ареасинусом, ареакосинусом, ареатангенсом та ареакотангенсом і знаходяться за формулами

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right), \quad \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{z+1}{z-1} \right).$$

Узагальнена степенева функція $\omega = z^\alpha$, де α – будь-яке комплексне число, визначається співвідношенням

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \quad z \neq 0.$$

Ця функція, зрозуміло, теж багатозначна, а її значення $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ називається **головним значенням**.

Узагальнена показникова функція $\omega = \alpha^z$, $\alpha \neq 0$ визначається рівністю

$$\alpha^z = e^{z \operatorname{Ln} \alpha}.$$

Для цієї функції **головним значенням** буде $\alpha^z = e^{z \ln \alpha}$.

Завдання: знайти значення логарифмічної функції.

Приклад 2.2

Обчислити значення $\operatorname{Ln}(-i)$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(-i) &= \ln |-i| + i \operatorname{arctg}(-i) + 2\pi k i = \ln 1 + i \left(\frac{3\pi}{2} \right) + 2\pi k i = \\ &= \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right) i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Рекомендації до виконання: при обчисленні значень логарифмічної функції слід для її аргументу виділити дійсну й уявну частини, знайти модуль і аргумент і застосувати означення логарифма.

2.2.1. $\operatorname{Ln}(2+i)$.	2.2.8. $\operatorname{Ln} \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right)$.	2.2.15. $\operatorname{Ln}(i-1)^2$.
2.2.2. $\operatorname{Ln}(-1+i)$.	2.2.9. $\operatorname{Ln}(2 \pm 3i)$.	2.2.16. $\operatorname{Ln}(4i)$.
2.2.3. $\operatorname{Ln} 6$.	2.2.10. $\operatorname{Ln}(3-2i)$.	2.2.17. $\operatorname{Ln}(1999)$.
2.2.4. $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$.	2.2.11. $\operatorname{Ln}(i^i)$.	2.2.18. $\operatorname{Ln} \left(\frac{1}{3} + i \right)$.
2.2.5. $\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)$.	2.2.12. $\operatorname{Ln} \left(2 + \frac{1}{i} \right)$.	2.2.19. $\operatorname{Ln} \left(\frac{1}{i^9} \right)$.
2.2.6. $\operatorname{Ln}(-1-i)$.	2.2.13. $\operatorname{Ln}(-i)$.	2.2.20. $\operatorname{Ln} \left(5 - i + \frac{5}{i} \right)$.
2.2.7. $\operatorname{Ln}(1-i)$.	2.2.14. $\operatorname{Ln} \left(\frac{6}{i} \right)$.	

Завдання: знайти значення обернених функцій.

Приклад 2.3

Обчислити значення $\operatorname{Arctg}(1+i)$.

Розв'язання

$$\operatorname{Arctg}(1+i) = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i}{2-i} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right),$$

але

$$\operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) = -\ln \sqrt{5} - i \operatorname{arctg} 2 + (2k+1)\pi i.$$

У результаті маємо

$$\operatorname{Arctg}(1+i) = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln \sqrt{5}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Рекомендації до виконання: обчислення значень обернених функцій більш громіздке. Спочатку, зробивши перехід до логарифмічної функції, слід виконати необхідні перетворення в аргументі логарифма, потім виділити його дійсну й уявну частини і за означенням обчислити значення логарифмічної функції.

$$2.2.21. \quad \operatorname{Arth} \left(\frac{3+2\sqrt{3}i}{7} \right).$$

$$2.2.22. \quad \operatorname{Arctg}(1+i).$$

$$2.2.23. \quad \operatorname{Arccos} 2i.$$

$$2.2.24. \quad \operatorname{Arch}(-2).$$

$$2.2.25. \quad \operatorname{Arcctg}(1+2i).$$

$$2.2.26. \quad \operatorname{Arctg} \left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3} \right).$$

$$2.2.27. \quad \operatorname{Arctg} \left(\frac{3+4i}{5} \right).$$

$$2.2.28. \quad \operatorname{Arth} \left(\frac{3+2\sqrt{3}i}{3} \right).$$

$$2.2.29. \quad \operatorname{Arccos}(-5).$$

$$2.2.30. \quad \operatorname{Arctg} \left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7} \right).$$

$$2.2.31. \quad \operatorname{Arcsin}(4).$$

$$2.2.32. \quad \operatorname{Arcth} \left(\frac{3-4i}{5} \right).$$

$$2.2.33. \quad \operatorname{Arctg} \left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7} \right).$$

$$2.2.34. \quad \operatorname{Arch}(3i).$$

$$2.2.35. \quad \operatorname{Arccos}(-3i).$$

$$2.2.36. \quad \operatorname{Arcctg} \left(\frac{5+3i}{5} \right).$$

$$2.2.37. \quad \operatorname{Arcth} \left(\frac{8+3\sqrt{3}i}{7} \right).$$

$$2.2.38. \quad \operatorname{Arcctg} \left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7} \right).$$

$$2.2.39. \quad \operatorname{Arcctg} \left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7} \right).$$

$$2.2.40. \quad \operatorname{Arth} \left(\frac{4-3i}{5} \right).$$

Завдання: обчислити значення узагальненої степеневій функції.

Приклад 2.4

Обчислити значення $(-3 - 4i)^i$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} (-3 - 4i)^i &= e^{i \operatorname{Ln}(-3-4i)} = e^{i(\ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{-4}{-3} + i\pi + 2\pi ki)} = \\ &= e^{-\operatorname{arctg} \frac{4}{3} - 2\pi(k + 1/2)} (\cos \ln 5 + i \sin \ln 5), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Рекомендації до виконання: при обчисленні значень узагальнених степеневих функцій слід застосувати формулу $\lambda^\mu = e^{\mu \operatorname{Ln} \lambda}$ і означення логарифмічної функції та формулу Ейлера, де це необхідно.

2.2.41. 1^{-i} .	2.2.48. 1^{2i} .	2.2.55. $(1 - i)^{3-3i}$.
2.2.42. $(1 + i)^i$.	2.2.49. i^{3i} .	2.2.56. $(-3 + 4i)^{1-i}$.
2.2.43. 2^{1-i} .	2.2.50. $(-1)^{4i}$.	2.2.57. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.
2.2.44. $(-2)^{\sqrt{2}}$.	2.2.51. $i^{\frac{1}{i}}$.	2.2.58. i^i .
2.2.45. $e^{1+i\frac{\pi}{4}}$.	2.2.52. $(-1)^{\sqrt{i}}$.	2.2.59. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.
2.2.46. $(-3 - 4i)^i$.	2.2.53. $(3 - 4i)^{1-i}$.	2.2.60. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$.
2.2.47. $(-i)^{5i}$.	2.2.54. i^{ii} .	

2.3. Рівняння з елементарними функціями

Завдання: знайти розв'язки рівнянь і позначити їх точками на комплексній площині.

Приклад 2.5

Розв'язати рівняння $\cos z = 2i$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Arccos} 2i = -i \operatorname{Ln}(2i \pm \sqrt{5}i); \\ z_1 &= -i \left[\ln(2 + \sqrt{5}) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ki \right] = -i \ln(2 + \sqrt{5}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ z_2 &= -i \left[\ln(\sqrt{5} - 2) + \frac{3\pi}{2}i + 2\pi ni \right] = -i \ln(\sqrt{5} - 2) + \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Приклад 2.6

Розв'язати рівняння $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$.

Розв'язання. Маємо квадратне рівняння відносно e^z , розв'язки якого $e^z = 1$ і $e^z = -3$. Обчислимо значення виразів $z = \text{Ln}(1)$ $z = \text{Ln}(-3)$. За означенням логарифма

$$\text{Ln}(-3) = \ln |-3| + i(\arg(-3) + 2\pi k) = \ln 3 + (2k + 1)\pi i,$$

$$\text{Ln } 1 = \ln 1 + 2\pi ki,$$

де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Рекомендації до виконання: при розв'язанні рівнянь із елементарними функціями застосовують такий алгоритм: функціональними перетвореннями зводять рівняння до вигляду $f(z) = \xi$, де $f(z)$ — елементарна функція; ξ — комплексне число, далі переходять до оберненої функції. При обчисленні оберненої функції слід бути уважними при врахуванні всіх можливих значень, щоб не втратити необхідних коренів.

$$2.3.1. \quad \sin z + \cos z = 2.$$

$$2.3.11. \quad \text{tg } z = \frac{5i}{3}.$$

$$2.3.2. \quad \cos z = \frac{3+i}{4}.$$

$$2.3.12. \quad e^{2z} + 2e^z - 3 = 0.$$

$$2.3.3. \quad 4 \cos z + 5 = 0.$$

$$2.3.13. \quad \sin z = \frac{5}{3}.$$

$$2.3.4. \quad \text{ctg } z = -\frac{3i}{5}.$$

$$2.3.14. \quad \sin z - \cos z = 3.$$

$$2.3.5. \quad e^z + i = 0.$$

$$2.3.15. \quad \text{ch } z = i.$$

$$2.3.6. \quad \text{ch } z = \frac{1}{2}.$$

$$2.3.16. \quad \text{sh } z = \frac{i}{2}.$$

$$2.3.7. \quad \text{sh } iz = -i.$$

$$2.3.17. \quad \text{ch } z + \text{sh } z = i.$$

$$2.3.8. \quad \sin z - \cos z = i.$$

$$2.3.18. \quad e^{ia} = \cos \pi a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$2.3.9. \quad \sin z = \pi i.$$

$$2.3.19. \quad \text{ch } z - \text{sh } z = 1.$$

$$2.3.10. \quad \text{sh } z - \text{ch } z = 2i.$$

$$2.3.20. \quad \text{Ln}(z + i) = 0.$$

3. Диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної

Якщо для функції $f(z)$, означеної в деякому околі точки z_0 , існує скінченна границя $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$, то така границя називається похідною функції $f(z)$ у точці z_0 і позначається як $f'(z)$, а функція називається **диференційовною в точці z_0** .

Для того щоб функція $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ була диференційовною в точці $z = x + iy$, необхідно і достатньо, щоб у точці (x, y) були диференційовними функції $U(x, y)$ і $V(x, y)$ і виконувалися умови

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

які мають назву **умов Коші–Рімана** або **Даламбера–Ейлера**.

Похідна диференційовних функцій обчислюється за формулами

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Але з умов Коші–Рімана випливає, що $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, тобто $\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}$ і всі формули диференціювання, отримані в математичному аналізі, залишаються правильними і в комплексному аналізі.

Функція $f(z)$ називається диференційовною в області, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області. Функції, диференційовні в області, називаються також **регулярними** або **аналітичними**. Таким чином, для регулярності функції в області G необхідно, щоб вона була неперервно диференційовною в цій області.

Застосовуючи умови Коші–Рімана, можна відновити аналітичну функцію $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ з точністю до довільного сталого доданка, якщо відома її дійсна $U(x, y)$ або уявна частина $V(x, y)$. Наприклад,

$$V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy \right) + C.$$

При цьому інтеграл не залежить від вибору кривої, яка з'єднує точки (x_0, y_0) і (x, y) , а залежить тільки від точки (x, y) .

3.1. Регулярність функцій комплексної змінної

Приклад 3.1

Чи є регулярною функція $f(z) = \bar{z}$?

Розв'язання. $U(x, y) = x$, $V(x, y) = -y$ — всюди диференційовні функції змінних x і y , але умови Коші–Рімана

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \neq \frac{\partial V}{\partial y}$$

не виконуються в жодній точці комплексної площини. Функція $f(z) = \bar{z}$ ніде не диференційовна, тобто не є регулярна.

Приклад 3.2

Чи є регулярною функція $f(z) = |z|^2$?

Розв'язання. Зважаючи на те, що $f(z) = \bar{z}z$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z = 0$, функція буде диференційовна тільки в точці $z = 0$ і не буде регулярна.

Завдання: визначити, чи є функція регулярною.

Рекомендації до виконання: при дослідженні регулярності функцій слід виділити в поданих функціях дійсну й уявну частини, а потім застосувати умови Коші–Рімана (Даламбера–Ейлера). Необхідно пам'ятати, що функція буде регулярна в області тільки в разі виконання умов диференційовності в усіх точках області. Для обчислення похідних слід спочатку перевірити функції на регулярність, а потім застосувати відомі з курсу математичного аналізу формули похідних для дійсних функцій.

3.1.1. $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

3.1.9. $f(z) = \operatorname{ch}(z - i)$.

3.1.2. $f(z) = z\bar{z}$.

3.1.10. $f(z) = \sin z$.

3.1.3. $f(z) = x^2 - 2iy$.

3.1.11. $f(z) = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$.

3.1.4. $f(z) = z^4$.

3.1.12. $f(z) = |z| \operatorname{Im} z$.

3.1.5. $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

3.1.13. $f(z) = \sin 3z - i$.

3.1.6. $f(z) = \cos(iz - 1)$.

3.1.14. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$.

3.1.7. $f(z) = \cos z$.

3.1.15. $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$.

3.1.8. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

3.1.16. $f(z) = ze^{\bar{z}}$.

$$3.1.17. \quad f(z) = |z|^2 + 2z.$$

$$3.1.19. \quad f(z) = z - z^2|z| + z^3\bar{z}.$$

$$3.1.18. \quad f(z) = z^2\bar{z} - |z| \operatorname{Im} z \operatorname{Re} z.$$

$$3.1.20. \quad f(z) = \operatorname{Ln}(1 - iz).$$

Завдання: визначити область диференційовності функції і знайти її похідну.

$$3.1.21. \quad f(z) = e^{\operatorname{ch} z}.$$

$$3.1.31. \quad f(z) = (e^z - e^{-z})^{-2}.$$

$$3.1.22. \quad f(z) = \sin(2e^z).$$

$$3.1.32. \quad f(z) = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z}.$$

$$3.1.23. \quad f(z) = \sin z \operatorname{ch} z - i \cos z \operatorname{sh} z.$$

$$3.1.33. \quad f(z) = \frac{e^{z-i}}{z^2 + 4}.$$

$$3.1.24. \quad f(z) = ze^{-z}.$$

$$3.1.34. \quad f(z) = \frac{\operatorname{th} z}{\operatorname{ch} z - i}.$$

$$3.1.25. \quad f(z) = \frac{e^z}{z}.$$

$$3.1.35. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch}(z+i) - 1}{e^{-z^2-4}}.$$

$$3.1.26. \quad f(z) = \frac{z \cos z}{1 + z^2}.$$

$$3.1.36. \quad f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$

$$3.1.27. \quad f(z) = \operatorname{tg} z.$$

$$3.1.37. \quad f(z) = \frac{z^2 \sin z}{1 - iz}.$$

$$3.1.28. \quad f(z) = \operatorname{ctg} z.$$

$$3.1.38. \quad f(z) = \frac{\operatorname{cth} z}{\operatorname{sh} z + i}.$$

$$3.1.29. \quad f(z) = \frac{\ln z}{z^3 - z^2 + z - 1}.$$

$$3.1.39. \quad f(z) = (\sin z + 2i)^{-2}.$$

$$3.1.30. \quad f(z) = \frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}.$$

$$3.1.40. \quad f(z) = z^2 - i(\operatorname{tg} z + 1).$$

3.2. Відновлення регулярних функцій

Існування умов Коші–Рімана (Даламбера–Ейлера) свідчить про те, що дійсна й уявна частини регулярної функції не є незалежні. При відновленні регулярних функцій застосовують формули Коші–Рімана (Даламбера–Ейлера), за допомогою відомих з курсу математичного аналізу інтегралів від елементарних функцій і елементарних перетворень встановлюють функціональну залежність від комплексної змінної.

Приклад 3.3

Відновити аналітичну функцію $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ за відомою її дійсною частиною $U(x, y) = 2e^x \cos y$, якщо $f(0) = 2$.

Розв'язання. Для відновлення регулярної функції за відомою її дійсною або уявною частиною застосовують такі алгоритми.

Перший спосіб. Маємо $\frac{\partial U}{\partial x} = 2e^x \cos y$. За першою умовою Коші–Рімана $\frac{\partial V}{\partial y} = 2e^x \cos y$. Звідси $V(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + C(x)$, де функція $C(x)$ поки що невідома.

Застосовуючи другу умову Коші–Рімана, маємо

$$2e^x \sin y + C'(x) = -\frac{\partial U}{\partial y} = 2e^x \sin y,$$

звідси $C'(x) = 0$. Отже, з точністю до сталої,

$$f(z) = 2e^x \cos y + i2e^x \sin y + C = 2e^z + C.$$

Сталу C знайдемо за додаткової умови $f(0) = 2$, $2e^0 + C = 2$, тобто $C = 0$. Остаточно $f(z) = 2e^z$.

Другий спосіб. Застосовуючи формулу

$$V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy \right) + C,$$

оберемо шлях інтегрування $(x = 0, y = 0) \rightarrow (x, y = 0) \rightarrow (x, y)$. Тоді $\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = -2e^x \sin y|_{y=0} = 0$ і остаточно

$$V(x, y) = \int_{(x, y=0)}^{(x, y)} \frac{\partial U}{\partial x} dy + C = \int_0^y 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y.$$

Отже, $f(z) = 2e^z$.

Третій спосіб. Якщо функції $U(x, y)$ або $V(x, y)$ мають простий вигляд, функцію $f(z)$ можна відновити за однією з таких формул:

$$f(z) = 2U \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) - \bar{C}_0, \quad f(z) = 2iV \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) + \bar{C}_0,$$

де $\bar{C}_0$ – спряжене число до $C_0 = f(z_0)$, а $\bar{z}_0$ – спряжене число до z_0 .

У нашому випадку $U(x, y) = 2e^x \cos y$, $z_0 = 0$, $C_0 = 2$. Тоді маємо $f(z) = 2 \cdot 2e^{\left(\frac{z}{2}\right)} \cos \frac{z}{2i} - 2$. З огляду на те, що $\cos \frac{z}{2i} = \cos \left(-\frac{iz}{2} \right) = \operatorname{ch} \frac{z}{2}$, отримаємо $f(z) = 2e^z$.

Завдання: відновити регулярну функцію за відомою дійсною $U(x, y)$ або уявною $V(x, y)$ її частиною.

3.2.1. $U(x, y) = 2e^x \cos y, f(\pi i) = -2.$

3.2.2. $V(x, y) = 2e^x \sin y, f(\pi i) = -2.$

3.2.3. $U(x, y) = \sin(y + 1) \operatorname{sh} x, f(i) = -1.$

3.2.4. $V(x, y) = 2 \sin y \operatorname{ch} x - 2xy, f(-i) = 1.$

3.2.5. $U(x, y) = -4xy - y, f(i) = -2i.$

3.2.6. $V(x, y) = \cos(y + 1) \operatorname{ch} x, f(-\pi i) = 1.$

3.2.7. $U(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y), f(0) = 0.$

3.2.8. $V(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x, f(-\pi i) = -1.$

3.2.9. $U(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0.$

3.2.10. $V(x, y) = x^3 - 3xy^2, f(0) = 1.$

3.2.11. $U(x, y) = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0.$

3.2.12. $U(x, y) = x^3 - 3xy + 1, f(0) = 1.$

3.2.13. $V(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y), f(0) = 0.$

3.2.14. $U(x, y) = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0.$

3.2.15. $U(x, y) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y, f(0) = 2.$

3.2.16. $U(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$

3.2.17. $V(x, y) = e^{-y} \sin x + y, f(0) = 1.$

3.2.18. $V(x, y) = e^x \cos y, f(0) = 1 + i.$

3.2.19. $V(x, y) = -\frac{y}{(x + 1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$

- 3.2.20. $V(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2.$
- 3.2.21. $U(x, y) = e^{-y} \cos x, f(0) = 1.$
- 3.2.22. $U(x, y) = y - 2xy, f(0) = 0.$
- 3.2.23. $V(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$
- 3.2.24. $U(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1.$
- 3.2.25. $V(x, y) = 3x^2y - y^3 - y, f(0) = 0.$
- 3.2.26. $V(x, y) = 2xy + y, f(0) = 0.$
- 3.2.27. $V(x, y) = 3x^2y - y^3, f(0) = 1.$
- 3.2.28. $U(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y), f(0) = 0.$
- 3.2.29. $V(x, y) = 2xy + 2x, f(0) = 0.$
- 3.2.30. $U(x, y) = 1 - e^x \sin y, f(0) = 1 + i.$
- 3.2.31. $V(x, y) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, f(0) = 2.$
- 3.2.32. $V(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$
- 3.2.33. $U(x, y) = e^{-y} \cos x + x, f(0) = 1.$
- 3.2.34. $V(x, y) = e^{-y} \sin x, f(0) = 1.$
- 3.2.35. $U(x, y) = \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + y^2}, f(0) = 1.$
- 3.2.36. $U(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + x, f(1) = 2.$
- 3.2.37. $V(x, y) = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0.$
- 3.2.38. $U(x, y) = -2xy - 2y, f(0) = i.$
- 3.2.39. $V(x, y) = 2xy - 2y, f(0) = 1.$

$$3.2.40. \quad U(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x, \quad f(0) = 0.$$

3.3. Інтегрування по кривій

Нехай функція $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ визначена і неперервна на кусково-гладкій спрямлюваній кривій γ , тоді обчислення інтеграла від функції $f(z)$ по кривій γ зводиться до обчислення таких криволінійних інтегралів:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} U dx - V dy + i \int_{\gamma} V dx + U dy.$$

Якщо крива γ задана параметричним рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, а початкова й кінцева точки дуги відповідають значенням $t = \alpha$ і $t = \beta$, то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] \cdot z'(t) dt, \quad \text{де } z(t) = x(t) + iy(t).$$

Для функцій $f(z)$, регулярних в однозв'язній області G , інтеграл не залежить від шляху інтегрування $\gamma \subset G$, а залежить тільки від початкової та кінцевої точок кривої γ . У цьому випадку для обчислення інтеграла застосовується формула **Ньютона–Лейбніца**

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

де $\Phi(z)$ — первісна для функції $f(z)$, тобто $\Phi' = f(z)$ в області G .

Завдання: обчислити інтеграл.

Приклад 3.4

Обчислити інтеграл $I = \int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz$ по параболі $y = x^2$.

Розв'язання. Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$1 + i - 2\bar{z} = U(x, y) + iV(x, y) = (1 - 2x) + i(1 + 2y).$$

Тоді інтеграл набуде вигляду

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz = \int_C (1 - 2x) dx - (1 + 2y) dy + i \int_C (1 + 2y) dx + (1 - 2x) dy.$$

Для параболи $y = x^2$ маємо $dy = 2x dx$ ($0 \leq x \leq 1$). Тому

$$\int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 (1-2x-(1+2x^2)2x)dx + i \int_0^1 (1+2x^2+(1-2x)2x)dx = -2 + \frac{4}{3}i.$$

Приклад 3.5

Обчислити інтеграл $I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$ по дузі кола $|z| = 1$.

Перший спосіб розв'язання — врахування гладкості кривої.

Для точок дуги кола $|z| = 1$ маємо $z = e^{i\varphi}$. Тоді $\ln z = i\varphi$, $dz = ie^{i\varphi}$, де дійсна змінна φ змінюється у проміжку $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Отже,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i^4 \varphi^3 e^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{\varphi^4}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Другий спосіб розв'язання — зведення до означеного інтеграла.

Введемо заміну $\ln z = \zeta$, $d\zeta = \frac{dz}{z}$. Дуга кола $|z| = 1$ перейде у відрізок уявної осі між точками $z = 0$ і $z = i\frac{\pi}{2}$, а інтеграл набуде вигляду

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}i} \zeta^3 d\zeta = \frac{\zeta^4}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{4} \frac{\pi^4 i^4}{2^4} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Третій спосіб розв'язання — зведення до повного диференціалу і застосування формули Ньютона–Лейбніца.

$$I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz = \int_1^i \ln^3 z d(\ln z) = \frac{\ln^4 z}{4} \Big|_1^i = \frac{\ln^4 i}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi i}{2} \right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.$$

Рекомендації до виконання: при обчисленні інтегралів, у яких інтегрування проводиться вздовж деякої ламаної, слід зобразити підінтегральну функцію через дійсну та уявну частини, а потім, розбивши ламану на декілька відрізків, інтегрувати на кожному відрізку, а результат подати у вигляді суми отриманих значень.

$$3.3.1. \quad \int_{AB} (2 - i + 3z\bar{z})dz; \quad AB : \{y = x^4, z_A = 0, z_B = 1 + i\}.$$

- 3.3.2. $\int_{ABC} (2 - i + 3z\bar{z})dz$; ABC — ламана, $z_A = 0$, $z_C = i$, $z_B = 1 + i$.
- 3.3.3. $\int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$; $AB : \{y = \frac{1}{2}x, z_A = 0, z_B = 4 + 2i\}$.
- 3.3.4. $\int_C z dz$, де C — ламана, що з'єднує точки $\begin{cases} A(-2; 0), B(-1; 1), \\ C(1; 1), D(2; 0). \end{cases}$
- 3.3.5. $\int_C z^3 dz$, де C — ламана, що з'єднує точки $O(0; 0)$, $A(1; 1)$ і $B(2; 1)$.
- 3.3.6. $\int_C \operatorname{Im} z dz$, де C — ламана, що з'єднує точки $A(0; 0)$, $B(1; 1)$ і $C(2; 1)$.
- 3.3.7. $\int_{\gamma} z^2 dz$, де γ з'єднує точки $z_1 = 1$ і $z_2 = 1 + i$.
- 3.3.8. $\int_C z^3 dz$, где C — дуга параболи $x = y^2$ між точками $\begin{cases} z_1 = 0, \\ z_2 = 1 + i. \end{cases}$
- 3.3.9. $\oint_C (x - y)dx + i y dy$, де C — коло $|z| = 1$.
- 3.3.10. $\int_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz$, де AB — відрізок прямої між точками $\begin{cases} z_A = 0, \\ z_B = 1 + i. \end{cases}$
- 3.3.11. $\int_L (z^3 + \sin z) dz$; $L : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.
- 3.3.12. $\int_L (z^4 + \sin z) dz$; $L : \{|z| = 2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.
- 3.3.13. $\int_L z|z| dz$; $L : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- 3.3.14. $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$; $AB : \{y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.
- 3.3.15. $\int_L (z + 1)e^z dz$; $L : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.
- 3.3.16. $\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz$; AB — відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 2 + 2i$.
- 3.3.17. $\int_{AB} (z^2 + 7z + 1) dz$; AB — відрізок прямої, $z_A = 1$, $z_B = 1 - i$.

- 3.3.18. $\int_{ABC} |z| dz$; ABC — ламана, $z_A = 0$, $z_C = 1 + i$, $z_B = -1 + i$.
- 3.3.19. $\int_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1) dz$ AB — відрізок прямої, $z_A = 1$, $z_B = i$.
- 3.3.20. $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$; AB — відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + i$.
- 3.3.21. $\int_{ABC} z^3 e^{z^4} dz$; ABC — ламана, $z_A = i$, $z_B = 1$, $z_C = 0$.
- 3.3.22. $\int_{ABC} \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz$; $AB : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, BC — відрізок, $\begin{cases} z_B = 1, \\ z_C = 2. \end{cases}$
- 3.3.23. $\int_{ABC} (z^2 + \cos z) dz$; ABC — ламана, $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = i$.
- 3.3.24. $\int_L \frac{\bar{z}}{z} dz$; L — межа області: $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$.
- 3.3.25. $\int_{ABC} (\operatorname{ch} z + \cos iz) dz$; ABC — ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1$, $z_C = i$.
- 3.3.26. $\int_L |z| \bar{z} dz$; $L : \{|z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.
- 3.3.27. $\int_L (\operatorname{ch} z + z) dz$; $L : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$.
- 3.3.28. $\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz$; $L : \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- 3.3.29. $\int_{AB} (3z^2 + 2z) dz$; $AB : \{y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.
- 3.3.30. $\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz$; $L : \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
- 3.3.31. $\int_{ABC} (z^2 + 1) dz$; ABC — ламана, $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$, $z_C = i$.
- 3.3.32. $\int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$; AB — відрізок прямої, $z_A = 1 + i$, $z_B = 0$.
- 3.3.33. $\int_L (\sin iz + z) dz$; $L : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.
- 3.3.34. $\int_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz$; AB — відрізок прямої, $z_A = 0$, $z_B = 1 + 2i$.

$$3.3.35. \int_{AB} (2z + 1)dz; \quad AB : \{y = x^3, z_A = 0, z_B = 1 + i\}.$$

$$3.3.36. \int_{AB} z\bar{z}dz; \quad AB : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}, \begin{cases} BC - \text{відрізок,} \\ z_B = 1, z_C = 0. \end{cases}$$

$$3.3.37. \int_{L} (\cos iz + 3z^2)dz; \quad L : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

$$3.3.38. \int_L |z|dz; \quad L : \{|z| = \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4}\}.$$

$$3.3.39. \int_{ABC} (z^9 + 1)dz; \quad ABC - \text{ламана, } z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i.$$

$$3.3.40. \int_{ABC} (\sin z + z^5)dz; \quad ABC - \text{ламана, } z_A = 0, z_B = 1, z_C = 2.$$

3.4. Застосування інтегральної формули Коші

Якщо функція $f(z)$ регулярна в однозв'язній області G , тоді інтеграл від $f(z)$ уздовж будь-якої замкненої спрямлюваної кривої $\gamma \subset G$ дорівнює нулю (теорема Коші):

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

а для будь-якої точки z_0 внутрішності кривої γ виконується **інтегральна формула Коші**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

причому

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Для функцій $f(z)$, регулярних у багатозв'язній області G , межа якої складається із замкненої кусково-гладкої кривої γ_0 і таких замкнених спрямлюваних кривих $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, що парами не перетинаються, існує таке узагальнення теореми Коші:

$$\oint_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_i \oint_{\gamma_i} f(z)dz,$$

де всі криві γ проходять у додатному напрямку.

Завдання: обчислити інтеграл, застосовуючи інтегральну формулу Коші.

Приклад 3.6

Обчислити інтеграл $I = \oint_{|z|=2} \frac{z \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^3} dz$.

Розв'язання. Функція $f(z) = z \cos z$ регулярна у внутрішності кола $|z| = 2$, до якого належить точка $z_0 = \frac{\pi}{3}$. Застосовуючи інтегральну формулу Коші для похідної порядку $n = 2$, запишемо

$$(z \cos z)''_{z=\frac{\pi}{3}} = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{z \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^3} dz,$$

звідси

$$\oint_{|z|=2} \frac{z \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^3} dz = \pi i (-2 \sin z - z \cos z) \Big|_{z=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{6} (6\sqrt{3} + \pi) i.$$

Приклад 3.7

Обчислити інтеграл $I = \oint_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)(z-i)} dz$.

Розв'язання. Застосуємо узагальнення теореми Коші на випадок багатозв'язних областей. Для цього проведемо розрізи від контуру Γ до контурів γ_1 і γ_2 , що обходять точки $z_1 = 2$ і $z_2 = i$ як показано на рис. 1. Побудований контур буде вже однозв'язний. Оскільки підінтегральна функція у внутрішності побудованого контуру регулярна, то за теоремою Коші

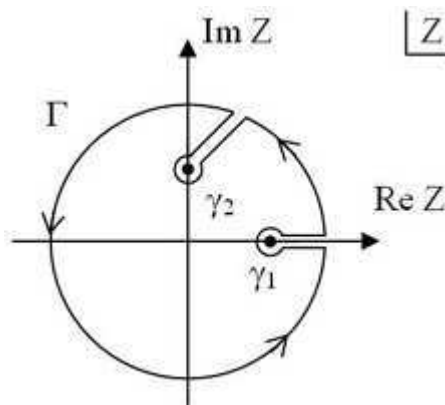


Рис. 1

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

При цьому було враховано, що відрізки, які з'єднують контур Γ з контурами γ_1 і γ_2 , проходять двічі у протилежних напрямках і їх внески взаємно знищуються. Якщо змінити напрямок обходу контурів γ_1 і γ_2 на додатний (проти

годинникової стрілки), інтеграл I перепишеться як

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)(z-i)} dz = \oint_{|z-2|=\varepsilon_1} \left(\frac{z^2}{z-2} \right) dz + \oint_{|z-i|=\varepsilon_2} \left(\frac{z^2}{z-i} \right) dz.$$

Чисельники підінтегральних виразів є регулярні функції в областях $|z-2| \leq \varepsilon_1$ і $|z-i| \leq \varepsilon_2$, тому за інтегральною формулою Коші

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-2)(z-i)} dz = 2\pi i \left(\frac{z^2}{z-i} \right) \Big|_{z=2} + 2\pi i \left(\frac{z^2}{z-2} \right) \Big|_{z=i} = 2\pi(2i-1).$$

Рекомендації до виконання: при обчисленні інтегралів за допомогою інтегральної формули Коші необхідно зобразити їх у вигляді

$$\oint_{|z-z_0|=a} \frac{f(z)}{(z-z_1)^\alpha (z-z_2)^\beta \dots (z-z_n)^\omega} dz, \text{ де } z_1, z_2, \dots, z_n - \text{точки, що нале-}$$

жать внутрішності кола }z-z_0|=a. Слід перевірити регулярність функції }f(z), застосувати узагальнення теореми Коші на випадок багатозв'язних областей і зобразити інтеграл у вигляді суми інтегралів уздовж замкнених неперетинних контурів } \gamma_i \text{ для кожної точки } z_i. Далі для кожного інтеграла необхідно застосувати інтегральну формулу Коші.}

$$3.4.1. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{5}} dz.$$

$$3.4.2. \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z-i} dz.$$

$$3.4.3. \oint_{|z+2i|=2} \frac{1}{z^2+1} dz.$$

$$3.4.4. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+i)^5} dz.$$

$$3.4.5. \oint_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z} dz.$$

$$3.4.6. \oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz.$$

$$3.4.7. \oint_{|z-2i|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz.$$

$$3.4.8. \oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{(z+1)(z-3)} dz.$$

$$3.4.9. \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+2z-3} dz.$$

$$3.4.10. \oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2i)^3} dz.$$

$$3.4.11. \oint_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2} dz.$$

$$3.4.12. \oint_{|z+2i|=\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2} dz.$$

$$3.4.13. \oint_{|z-2i|=\frac{1}{4}} \frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2} dz.$$

$$3.4.14. \oint_{|z+2|=1} \frac{\operatorname{sh} z\pi}{(z-1)(z^2+4)^2} dz.$$

$$3.4.15. \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz.$$

$$3.4.16. \oint_{|z|=2} \frac{z \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2} dz.$$

$$3.4.17. \oint_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2 + 4)^2} dz.$$

$$3.4.18. \oint_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz.$$

$$3.4.19. \oint_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz.$$

$$3.4.20. \oint_{|z|=1} \frac{z^3 + 1}{z^2 + 4} dz.$$

$$3.4.21. \oint_{|z+2i|=1} \frac{z^3 + 1}{z^2 + 4} dz.$$

$$3.4.22. \oint_{|z-2i|=1} \frac{z^3 + 1}{z^2 + 4} dz.$$

$$3.4.23. \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos 2z}{z^2 + 3z + 2} dz.$$

$$3.4.24. \oint_{|z+2|=\frac{1}{2}} \frac{\cos 2z}{z^2 + 3z + 2} dz.$$

$$3.4.25. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos 2z}{z^2 + 3z + 2} dz.$$

$$3.4.26. \oint_{|z|=6} \frac{e^{-z}}{z + \pi i} dz.$$

$$3.4.27. \oint_{|z+2i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{-z}}{z + \pi i} dz.$$

$$3.4.28. \oint_{|z-\pi i|=1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{\left(z + \frac{\pi i}{2}\right)^2 (z - \pi i)^2}.$$

$$3.4.29. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} z}{\left(z + \frac{\pi i}{2}\right)^2 (z - \pi i)^2} dz.$$

$$3.4.30. \oint_{|z-2i|=2} \frac{\cos z}{(z - i)^2} dz.$$

$$3.4.31. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z - 2)^2} dz.$$

$$3.4.32. \oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z(z - 2)^2} dz.$$

$$3.4.33. \oint_{|z-2i|=1} \frac{\cos z}{z(z - 2)^2} dz.$$

$$3.4.34. \oint_{|z+\frac{\pi i}{2}|=1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{\left(z + \frac{\pi i}{2}\right)^2 (z - \pi i)^2}.$$

$$3.4.35. \oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{z^2 - 9} dz.$$

$$3.4.36. \oint_{|z+3|=2} \frac{e^z}{z^2 - 9} dz.$$

$$3.4.37. \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - 9} dz.$$

$$3.4.38. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz.$$

$$3.4.39. \oint_{|z-3|=6} \frac{z}{(z - 2)^2 (z + 4)} dz.$$

$$3.4.40. \oint_{|z|=1/2} \frac{1 - \sin z}{z^2} dz.$$

4. Функціональні ряди в комплексній області

4.1. Ряди з комплексними числами

Числовим рядом із комплексними членами називають вираз вигляду

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad z_n = x_n + iy_n.$$

Ряд називається збіжним, якщо існує скінченна границя S часткових сум S_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha=1}^n z_{\alpha} = S \neq \infty;$$

у протилежному випадку ряд називається розбіжним. Число S називається сумою ряду. Збіжність ряду з комплексними числами еквівалентна збіжності двох дійсних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Необхідною ознакою збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ є $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

складений із модулів його членів. Абсолютно збіжний ряд є і просто збіжним.

До числових рядів застосовні такі ознаки абсолютної збіжності:

ознака Даламбера — ряд збігається абсолютно, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < 1$, при

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > 1 \text{ — ряд розбіжний;}$$

ознака Коші — ряд збігається абсолютно, якщо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, при

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \text{ — ряд розбіжний, де } \overline{\lim} \text{ — верхня границя послідовності.}$$

Також застосовні **ознаки порівняння**:

1) якщо між членами числових рядів із комплексними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ виконується співвідношення $|a_n| \leq |b_n|$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ збігається, то абсолютно збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) якщо існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|/|b_n|) = k$, то обидва ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одночасно збігаються або одночасно не збігаються.

Завдання: дослідити числовий ряд на збіжність.

Приклад 4.1

Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ на збіжність.

Розв'язання. Якщо використовувати ознаку Даламбера, то границя дорівнюватиме одиниці, тому запишемо $e^{in} = \cos n + i \sin n$. Таким чином, питання про збіжність даного ряду зводиться до питання про збіжність рядів із дійсними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. Кожен із цих рядів збігається абсолютно. Отже, заданий ряд також збігається абсолютно, а тому і просто збігається.

Рекомендації до виконання: при дослідженні на збіжність числових рядів необхідно уважно застосовувати одну з ознак Даламбера або Коші. При застосуванні останньої слід пам'ятати, що в цьому випадку ми знаходимо верхню границю виразу. Якщо при застосуванні однієї з ознак ми отримуємо 1, то в такому випадку необхідно застосовувати ознаку порівняння. Зауваження: модуль у всіх наведених виразах — суто модуль комплексного числа!

$$4.1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}.$$

$$4.1.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}.$$

$$4.1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}.$$

$$4.1.4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - i}{n+1}.$$

$$4.1.5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n.$$

$$4.1.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{i}{3n} \right].$$

$$4.1.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i(2n+i)}{4n} \right]^n.$$

$$4.1.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}.$$

$$4.1.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}.$$

$$4.1.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5^{n^2}}.$$

$$4.1.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}.$$

$$4.1.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$4.1.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos in}.$$

$$4.1.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}.$$

$$4.1.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{sh} in}.$$

$$4.1.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} i\frac{\pi}{n}}{n^{\ln n}}.$$

$$\begin{array}{ll}
4.1.17. & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{i}{2n+1} \right). \\
4.1.18. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}.
\end{array}
\quad
\begin{array}{ll}
4.1.19. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}. \\
4.1.20. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}.
\end{array}$$

4.2. Степеневі ряди. Ряд Тейлора

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots + C_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n,$$

де $a, C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$ — задані комплексні числа; z — комплексна змінна.

Кожну функцію, регулярну в області D , завжди можна зобразити в околі довільної точки $z_0 \in D$ у вигляді суми збіжного степеневого ряду (ряду Тейлора):

$$f(z) = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots + C_n(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n,$$

де $C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$.

Область збіжності цього ряду $|z - z_0| < R$ називається кругом збіжності, а R — радіусом збіжності степеневого ряду. Радіус збіжності визначає відстань до найближчої точки на комплексній площині, де функція $f(z)$ втрачає свою регулярність.

Для визначення радіуса збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ застосуємо до його членів умови Даламбера і Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} \frac{|z-a|^{n+1}}{|z-a|^n} < 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} |z-a| < 1,$$

звідси для радіуса збіжності знайдемо формули

$$\text{Даламбера} - R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|; \quad \text{Коші-Адамара} - R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}, \quad C_n \neq 0.$$

Завдання: знайти круг і радіус збіжності степеневого ряду.

Приклад 4.2

Знайти круг і радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n (z-2)^n$.

Розв'язання. Модуль коефіцієнтів $C_n = (1+i)^n$ дорівнює

$$|C_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

За формулою Коші-Адамара знайдемо $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Отже, круг збіжності ряду $|z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, межа якого є коло радіуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ з центром у точці $z = 2$.

Рекомендації до виконання: формула Даламбера більш зручна при коефіцієнтах алгебричного вигляду, а Коші-Адамара — степеневого вигляду.

$$4.2.1. \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n.$$

$$4.2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n3^n}.$$

$$4.2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{n^2} z^{3n}.$$

$$4.2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}.$$

$$4.2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z-i}{1+i} \right)^n.$$

$$4.2.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

$$4.2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n2^n}.$$

$$4.2.10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n.$$

$$4.2.11. \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n.$$

$$4.2.12. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n.$$

$$4.2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}.$$

$$4.2.4. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n (\sqrt{n-1} - i).$$

$$4.2.13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n.$$

$$4.2.14. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n.$$

$$4.2.15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in} \right)^n.$$

$$4.2.16. \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

$$4.2.17. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi}{n} z^n.$$

$$4.2.18. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{i\pi}{\sqrt{n}} z^n.$$

$$4.2.19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\operatorname{sh}^n(1+in)}.$$

$$4.2.20. \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n.$$

4.3. Розвинення функцій у ряд Тейлора

Для визначення коефіцієнтів розвинення регулярної функції в ряд Тейлора застосовують формули

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{або} \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$, буде виправданим тільки для функцій дуже простого вигляду. Частіше застосовують такі прийоми.

1. *Застосування стандартних розвинень.*

До основних, або стандартних, розвинень належать:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1),$$

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad \begin{cases} \text{для головної гілки логарифма} \\ \text{при } |z-1| < 1, \end{cases}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad \begin{cases} \text{для головної гілки логарифма} \\ \text{при } |z| < 1, \end{cases}$$

$$z^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n (z-1)^n, \quad |z-1| < 1, \quad C_\alpha^k = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, & k = 1, 2, \dots, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Приклад 4.3

Записати розвинення в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$ для функції $e^{z \operatorname{ctg} \alpha} \cos z$, $\alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

Розв'язання

$$\begin{aligned} e^{z \operatorname{ctg} \alpha} \cos z &= e^{z \operatorname{ctg} \alpha} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{z(\operatorname{ctg} \alpha + i)} + e^{z(\operatorname{ctg} \alpha - i)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ctg} \alpha + i)^n + (\operatorname{ctg} \alpha - i)^n}{n!} z^n = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n}{n! \sin^n \alpha} z^n = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{n! \sin^n \alpha} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n! \sin^n \alpha} z^n. \end{aligned}$$

2. Зведення раціональних функцій до суми елементарних дробів із подальшим застосуванням формул для суми геометричної прогресії.

Приклад 4.4

Записати ряд Тейлора за степенями $(z - 1)$ для функції $f(z) = \frac{1}{z+2}$.

Розв'язання. Зобразимо задану функцію у вигляді $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{z-1}{3}\right)}$

і застосуємо відому формулу $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$. Тоді

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n, \quad \left|\frac{z-1}{3}\right| < 1.$$

Радіусом збіжності буде відстань до особливої точки $z = -2$ (де функція втрачає свою регулярність).

3. Застосування методу ділення багаточлена на багаточлен "у стовпчик" для розвинення раціональних функцій за степенями z .

Приклад 4.5

Розвинути за степенями z функцію $f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z+2}$.

Розв'язання. Оскільки розвинення повинне бути за зростаючими степенями z , то і багаточлени розташуємо за зростаючими степенями

$$\begin{array}{r} 3 - z + z^2 \quad | \underline{2 + z} \\ -3 - 3z/2 \quad 3/2 - 5z/4 + 9z^2/8 - 9z^3/16 + \dots \\ \hline -5z/2 + z^2 \\ 5z/2 + 5z^2/4 \\ \hline 9z^2/4 \\ -9z^2/4 - 9z^3/4 \\ \hline -9z^3/4 \dots \end{array} \quad \frac{z^2 - z + 3}{z+2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{4}z + 9 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n.$$

Радіусом збіжності буде $|z| = 2$, тобто відстань від $z = 0$ до найближчої точки $z = -2$, де функція втрачає регулярність.

4. Застосування диференціювання або інтегрування стандартних розвинень.

З огляду на те, що ряд Тейлора збігається рівномірно його можна диференціювати або інтегрувати почленно. Радіус збіжності при цьому не змінюється.

Приклад 4.6

Розвинути за степенями z функцію $f(z) = \frac{z+1}{(1-z)^3}$.

Розв'язання. Зобразимо $f(z)$ через елементарні дроби

$$\frac{z+1}{(1-z)^3} = (z+1) \cdot \frac{1}{(1-z)^3}.$$

Для $\frac{1}{1-z}$ маємо стандартне розвинення

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

тому після диференціювання

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \quad \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}.$$

Остаточно

$$\frac{z+1}{(1-z)^3} = (z+1) \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-1}.$$

5. Виділення регулярної гілки і перетворення багатозначної функції до вигляду, придатного до застосування стандартних розвинень.

Приклад 4.7

Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(z) = \text{Ln}(z+5)$.

Розв'язання. Функція $\text{Ln}(z+5) = \ln|z+5| + i(\arg(z+5) + 2\pi k)$ багатозначна. Для виділення однозначної регулярної гілки здійснимо розріз від точки $z = -5$, де функція невизначена, до $-\infty$. Оберемо ту гілку, для якої $f(0) = \ln 5$, тобто $k = 0$.

Перепишемо функцію як

$$\ln(z+5) = \ln\left(5\left(1+\frac{z}{5}\right)\right) = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{z}{5}\right)$$

і, застосовуючи стандартні розвинення, матимемо

$$\ln(z+5) = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n5^n} z^n, \quad \left| \frac{z}{5} \right| < 1.$$

Областю збіжності розвинення за степенями z буде круг $|z| < 5$, радіус якого визначається відстанню від нуля до точки $z = -5$, де функція втрачає регулярність.

Завдання: зобразити функцію у вигляді ряду Тейлора.

$$4.3.1. \quad f(z) = \sin^2 z, \quad (z).$$

$$4.3.11. \quad f(z) = \frac{1}{z+3}, \quad (z-3).$$

$$4.3.2. \quad f(z) = e^z \cos z, \quad (z).$$

$$4.3.12. \quad f(z) = \cos z, \quad \left(z + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$4.3.3. \quad f(z) = \frac{1}{z}, \quad (z-1).$$

$$4.3.13. \quad f(z) = e^z, \quad (2z-1).$$

$$4.3.4. \quad f(z) = \ln \sin z, \quad \left(z - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$4.3.14. \quad f(z) = \frac{1}{3z+1}, \quad (z+2).$$

$$4.3.5. \quad f(z) = \frac{1 - \cos z}{(z-1)^2}, \quad (z-2).$$

$$4.3.15. \quad f(z) = \frac{z+1}{z^2+4z-5}, \quad (z).$$

$$4.3.6. \quad f(z) = \sin(2z+1), \quad (z+1).$$

$$4.3.16. \quad f(z) = \frac{z}{z^2+i}, \quad (z).$$

$$4.3.7. \quad f(z) = \frac{1}{z+1}, \quad (z-2).$$

$$4.3.17. \quad f(z) = \cos^2 \frac{iz}{2}, \quad (z).$$

$$4.3.8. \quad f(z) = e^z, \quad (z-1).$$

$$4.3.18. \quad f(z) = \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}, \quad (z).$$

$$4.3.9. \quad f(z) = \ln(2+z-z^2), \quad (z).$$

$$4.3.19. \quad f(z) = \ln(2-z), \quad (z).$$

$$4.3.10. \quad f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}, \quad (z).$$

$$4.3.20. \quad f(z) = \operatorname{ch}(1-z), \quad \left(z - \frac{\pi}{2}i\right).$$

4.4. Нулі регулярних функцій

Точка $z = a$ називається **нулем регулярної функції** $f(z)$, якщо $f(a) = 0$. **Скінченна точка** $a \neq \infty$ буде нулем функції $f(z)$ тоді й тільки тоді, якщо правдиве зображення функції у вигляді

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

де $\varphi(z)$ — регулярна функція, причому $\varphi(a) \neq 0$.

Число m називається порядком або кратністю нуля $z = a$ функції $f(z)$ і дорівнює найменшому порядку похідної функції в цій точці, відмінної від

нуля

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \dots, \quad f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Нуль першого порядку називається **простим нулем**.

Для **нескінченно віддаленої точки** $z = \infty$ функція $f(z)$ має нуль порядку m , якщо правдиве зображення

$$f(z) = (z)^{-m} \psi(z),$$

де $\psi(z)$ — регулярна функція, причому $\psi(\infty) \neq 0$.

Порядок нуля функції, зображеної у вигляді відношення $\frac{f(z)}{g(z)}$, де $f(a) = 0$ і $g(a) = 0$, дорівнює різниці порядку нуля чисельника і порядку нуля знаменника.

Приклад 4.8

Знайти нулі функції $f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z$ і визначити їх порядки.

Розв'язання. З рівняння $(z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z = 0$ знайдемо

$$z = -i, \quad z = i, \quad z = k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 1, \dots)$$

Нехай $z = -i$, тоді $f(z)$ можна зобразити у вигляді

$$f(z) = (z + i)^3 \varphi(z),$$

де $\varphi(z) = (z - i)^3 \operatorname{sh} z$ регулярна в точці $z = -i$, причому $\varphi(-i) = 8i \operatorname{sh} i = -8 \sin 1 \neq 0$. Це означає, що точка $z = -i$ — нуль третього порядку. Аналогічно доводиться, що точка $z = i$ також є нуль третього порядку. Дослідимо нулі $z = k\pi i$, ($k = 0, \pm 1, \pm 1, \dots$). Похідна

$$f'(z) = 6z(z^2 + 1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2 + 1)^3 \operatorname{ch} z$$

у точках $z = k\pi i$ не є нуль. Звідси $z = k\pi i$ — нулі першого порядку.

Приклад 4.9

Знайти нулі функції $f(z) = z^2 \sin z$ і визначити їх порядок.

Розв'язання. Зрівняємо $f(z)$ нулю — $z^2 \sin z = 0$. Звідси $z^2 = 0$, $\sin z = 0$. Розв'язавши ці рівняння, знайдемо нулі функції $f(z)$:

$$z = 0, \quad z = k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Нехай $z = 0$, тоді

$$f'(0) = (2z \sin z + z^2 \cos z) \Big|_{z=0} = 0;$$

$$f''(0) = (2 \sin z + 4z \cos z - z^2 \sin z) \Big|_{z=0} = 0;$$

$$f'''(0) = (6 \cos z - 4 \sin z - 2z \sin z - z^2 \cos z) \Big|_{z=0} \neq 0.$$

Отже, $z = 0$ — нуль третього порядку, а нулі $z = k\pi$, $k \neq 0$ — першого порядку, оскільки $f'(k\pi) = (2z \sin z + z^2 \cos z) \Big|_{z=k\pi, k \neq 0} \neq 0$.

Можна підійти до розв'язання цієї задачі по-іншому. Записуючи $\sin z$ у вигляді розвинення в ряд Тейлора

$$f(z) = z^2 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = z^3 \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right),$$

отримаємо зображення функції у вигляді

$$f(z) = z^3 \varphi(z), \quad \varphi(0) \neq 0,$$

з якого знайдемо порядок нуля $m = 3$.

Приклад 4.10

Знайти порядок нуля $z = 0$ для функції $f(z) = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$ і визначити його порядок.

Розв'язання. Застосуємо означення гіперболічного синуса і розвинення експоненціальної функції в ряд

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4z} (e^z - e^{-z})^2 = \frac{1}{4z} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots - 1 + z - \frac{z^2}{2!} + \dots \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4z} \left(2z + \frac{2z^3}{3!} + \dots \right)^2 = \frac{4z^2}{4z} \left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^2. \end{aligned}$$

Оскільки порядок нуля чисельника дорівнює 2 ($m = 2$), а нуль знаменника — простий, ($k = 1$), то функція $f(z)$ має нуль першого порядку ($m - k = 1$) і може бути зображеною у вигляді

$$f(z) = z \cdot \varphi(z), \quad \varphi(0) \neq 0.$$

Приклад 4.11

Знайти порядок нуля для функції $f(z) = \frac{z^2}{z^5 + 2z^2 + 1}$ у нескінченно віддаленій точці.

Розв'язання. Зобразимо $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \frac{z^2}{z^5 \left(1 + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right)} = \frac{1}{z^3} \varphi(z), \text{ де } \varphi(z) = \frac{1}{1 + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^5}}, \quad \varphi(\infty) \neq 0.$$

Отже, $z = \infty$ — нуль кратності трьох.

Завдання: знайти нулі функції і визначити їх порядок.

4.4.1. $f(z) = (\cos z - 1)^2 \operatorname{sh} z.$

4.4.6. $f(z) = z - \sin z.$

4.4.2. $f(z) = (z + 2i)^3(z^2 + 1)^4.$

4.4.7. $f(z) = (z^3 - i)^2 \cos z.$

4.4.3. $f(z) = z^5 + z^3 - z.$

4.4.8. $f(z) = (z^2 - i)^2(z - 2)^3.$

4.4.4. $f(z) = (e^{2z} - 1) \sin z.$

4.4.9. $f(z) = z^6 - z^4 + 2z - 1.$

4.4.5. $f(z) = 1 - \cos 3z.$

4.4.10. $f(z) = \cos 2z(z - i)(z + 1).$

4.5. Ряд Лорана

Функція $f(z)$, що регулярна в круговому кільці $r < |z - z_0| < R$, однозначно зображується в цьому кільці збіжним **рядом Лорана**

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k(z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z - z_0)^k,$$

коефіцієнти якого знаходяться за формулами

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

де γ — довільне коло $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

Розвинення за від'ємними степенями $\sum_{k=-\infty}^{-1} C_k(z - z_0)^k$, яке збігається в області $|z - z_0| > r$, називають **головною частиною**, а ряд за додатними степенями $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z - z_0)^k$, що збігається в області $|z - z_0| < R$, — **правильною частиною** ряду Лорана.

Для випадку розвинення в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої ($z = \infty$) точки

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k = \sum_{k=-\infty}^0 C_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k$$

правильною (регулярною) частиною буде вже перший доданок за від'ємними степенями z , а **головною (іррегулярною)** частиною — другий доданок за додатними степенями z .

На практиці для знаходження коефіцієнтів C_k , якщо це можливо, застосовують стандартні зображення елементарних функцій у вигляді рядів Тейлора (див. розділ 4.3).

Завдання: розвинути функцію в ряд Лорана.

Приклад 4.12

Знайти розвинення функції $f(z) = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2}$ у ряд Лорана в кільці $0 < |z - 1| < 1$.

Розв'язання. Зобразимо функцію $f(z)$ у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z - 2}.$$

Перший дріб — функція, регулярна в області $|z - 1| > 0$, тому він належить до головної частини ряду Лорана. Другий дріб — функція, регулярна в області $|z - 1| < 1$, тому він належить до правильної частини ряду Лорана. Перетворимо його таким чином, щоб можна було застосувати стандартні розвинення за додатними степенями $(z - 1)$:

$$\frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{1 - (z - 1)}.$$

Застосовуючи відоме розвинення для функції $\frac{1}{1 - q}$, де $q = (z - 1)$ $|q| < 1$, знайдемо

$$\frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 1} - [1 + (z - 1) + (z - 1)^2 + \dots] = \frac{1}{z - 1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z - 1)^n.$$

Рекомендації до виконання: необхідно пам'ятати, що розвинення функції в ряд Лорана в кільці $z < |z - a| < R$ складається з регулярної частини (за додатними степенями), яка є регулярною функцією в області $|z - a| < R$, і головної частини (за від'ємними степенями), яка буде регулярна в області $|z - a| > r$. Тобто функцію, що розвивається в ряд Лорана, доцільно

зобразити у вигляді суми двох функцій, одна з яких регулярна в області $|z - a| < R$, а інша — в області $|z - a| > r$. Для раціональних функцій це зручніше робити, розбиваючи їх на елементарні дроби, а потім кожен окремий дріб зображати у вигляді відомої суми $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. При цьому слід пам'ятати, що для збіжності ряду за степенями q^n необхідне виконання умови $|q| < 1$, а для збіжності ряду за степенями q^{-n} необхідно, щоб $|q| > 1$.

$$4.5.1. \quad f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.2. \quad f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

$$4.5.3. \quad f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 0 < |z| < 2.$$

$$4.5.4. \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.5. \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}, \quad 2 < |z| < 3.$$

$$4.5.6. \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}, \quad 3 < |z| < \infty.$$

$$4.5.7. \quad f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad 0 < |z| < 1.$$

$$4.5.8. \quad f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

$$4.5.9. \quad f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

$$4.5.10. \quad f(z) = \frac{1}{z+1}, \quad |z| < 1.$$

$$4.5.11. \quad f(z) = \frac{1}{z+1}, \quad |z+1| < 1.$$

$$4.5.12. \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.13. \quad f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)}, \quad 0 < |z| < 2.$$

$$4.5.14. \quad f(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.15. \quad f(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2}, \quad |z| < 1.$$

$$\begin{aligned}
4.5.16. \quad f(z) &= \frac{z+1}{z^2+z-2}, \quad 2 < |z| < \infty. \\
4.5.17. \quad f(z) &= \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, \quad 1 < |z| < 2. \\
4.5.18. \quad f(z) &= \frac{z}{(2z+1)(z-4)}, \quad 4 < |z| < \infty. \\
4.5.19. \quad f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 2 < |z| < 3. \\
4.5.20. \quad f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad 3 < |z| < \infty. \\
4.5.21. \quad f(z) &= \frac{1}{z^2+z}, \quad 0 < |z| < 1. \\
4.5.22. \quad f(z) &= \frac{1}{z^2+z}, \quad 1 < |z| < \infty. \\
4.5.23. \quad f(z) &= \frac{1}{(z+2)(z^2+1)}, \quad 1 < |z| < 2. \\
4.5.24. \quad f(z) &= \frac{1}{(z+2)(z^2+1)}, \quad 4 < |z| < \infty. \\
4.5.25. \quad f(z) &= \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1 < |z| < 2. \\
4.5.26. \quad f(z) &= \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad 0 < |z| < 1. \\
4.5.27. \quad f(z) &= \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad 1 < |z| < 2. \\
4.5.28. \quad f(z) &= \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad 2 < |z| < \infty. \\
4.5.29. \quad f(z) &= \frac{2}{z^2-1}, \quad 1 < |z+2| < 3. \\
4.5.30. \quad f(z) &= \frac{1}{z^2+2z-8}, \quad 1 < |z+2| < 4. \\
4.5.31. \quad f(z) &= \frac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad 2 < |z-1| < \infty. \\
4.5.32. \quad f(z) &= \frac{z^5}{(z^2-4)^2}, \quad 2 < |z| < \infty. \\
4.5.33. \quad f(z) &= \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, \quad 1 < |z| < 2. \\
4.5.34. \quad f(z) &= \frac{1}{z^2+1}, \quad 0 < |z-i| < 2.
\end{aligned}$$

$$4.5.35. \quad f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)^2}, \quad 4 < |z + 2| < \infty.$$

$$4.5.36. \quad f(z) = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2}, \quad 0 < |z - 1| < 1.$$

$$4.5.37. \quad f(z) = \frac{2z - 3}{z^2 - 3z + 2}, \quad 0 < |z - 2| < 1.$$

$$4.5.38. \quad f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}, \quad 0 < |z| < 1.$$

$$4.5.39. \quad f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.40. \quad f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

Завдання: розвинути функцію в ряд Лорана.

$$4.5.41. \quad f(z) = z^2 e^{1/z}, \quad |z| < 1.$$

$$4.5.42. \quad f(z) = z \cos \frac{1}{z - 2}, \quad 0 < |z - 2| < 1.$$

$$4.5.43. \quad f(z) = e^{1/(z-1)}, \quad 0 < |z - 1| < 1.$$

$$4.5.44. \quad f(z) = \cos \frac{3z}{z - i}, \quad 1 < |z - i| < 2.$$

$$4.5.45. \quad f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z - 2)^2}, \quad 0 < |z - 2| < 1.$$

$$4.5.46. \quad f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z - 1}, \quad 0 < |z - 1| < 1.$$

$$4.5.47. \quad f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z + 1}{z}, \quad |z| < 1.$$

$$4.5.48. \quad f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

$$4.5.49. \quad f(z) = \sin \frac{z}{1 - z}, \quad 0 < |z - 1| < 1.$$

$$4.5.50. \quad f(z) = \sin \frac{5z}{z - 2i}, \quad 0 < |z - 2i| < 1.$$

$$4.5.51. \quad f(z) = \operatorname{ctg} z, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.52. \quad f(z) = \operatorname{ctg} z, \quad \pi < |z| < 2\pi.$$

$$4.5.53. \quad f(z) = z \cos \pi \frac{z + 3}{z - 1}, \quad 0 < |z - 1| < 1.$$

$$4.5.54. \quad f(z) = (z - 3) \cos \pi \frac{z - 3}{z}, \quad 0 < |z| < \pi.$$

$$4.5.55. \quad f(z) = \frac{1}{z - 2} \ln \frac{z - i}{z + i}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.56. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$4.5.57. \quad f(z) = \sin \frac{3z - i}{3z + i}, \quad 0 < \left| z + \frac{i}{3} \right| < 1.$$

$$4.5.58. \quad f(z) = ze^{\frac{\pi}{(z - a)^2}}, \quad 0 < |z - a| < 2.$$

$$4.5.59. \quad f(z) = \frac{1}{z - 1} e^{1/(z-1)}, \quad 0 < |z - 1| < 2.$$

$$4.5.60. \quad f(z) = \sin \frac{z^2 - 4z}{(z - 2)^2}, \quad 0 < |z - 2| < 1.$$

Завдання: визначити область збіжності ряду Лорана.

Приклад 4.13

Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 4i)^n}{(z + 2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z + 2i}{6} \right)^n$.

Розв'язання. Ряд за додатними степенями $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z + 2i}{6} \right)^n$ належить до правильної частини ряду Лорана і збігається в крузі $|z + 2i| < R$. Для обчислення радіуса збіжності для даного ряду придатні як формула Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| = \left| \frac{6^{-n}}{6^{-n-1}} \right| = 6,$$

так і формула Коші–Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}} = \frac{1}{\sqrt[n]{6^{-n}}} = 6.$$

Для визначення області збіжності ряду за від'ємними степенями $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 4i)^n}{(z + 2i)^n}$

перепишемо його у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} (3 + 4i)^n t^n$, де $t = 1/(z + 2i)$. За ознакою Далам-

бера $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3 + 4i)^{n+1} t^{n+1}}{(3 + 4i)^n t^n} \right| < 1$ або за ознакою Коші $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(3 + 4i)^n t^n|} < 1$

отримаємо нерівність

$$|t| = \left| \frac{1}{z+2i} \right| < \frac{1}{|3+4i|}, \quad \text{тобто} \quad |z+2i| > |3+4i| = r = 5,$$

яка визначає внутрішню межу кільця збіжності $r < |z+2i| < R$ ряду Лорана.

Отже, заданий ряд збігається в кільці $5 < |z+2i| < 6$.

$$4.5.61. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

$$4.5.62. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{3} \right)^n.$$

$$4.5.63. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + in \right) (z+1+i)^n.$$

$$4.5.64. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n.$$

$$4.5.65. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4} \right)^n.$$

$$4.5.66. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n.$$

$$4.5.67. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}.$$

$$4.5.68. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}.$$

$$4.5.69. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}.$$

$$4.5.70. \quad -\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^n}.$$

5. Особливі точки і лишки функцій комплексної змінної

5.1. Ізольовані особливі точки однозначного характеру

Точка z_0 називається **ізольованою особливою точкою** однозначного характеру функції $f(z)$, якщо функція $f(z)$ регулярна в деякому околі точки z_0 і не регулярна в самій точці z_0 .

Ізольована особлива точка $z_0 \neq \infty$ однозначного характеру функції $f(z)$ називається:

1) **усувною особливою точкою**, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0 \neq \infty$. Тоді розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана в точці z_0 не містить членів із від'ємними степенями $(z - z_0)$;

2) **полюсом**, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Тоді головна частина ряду Лорана містить скінченну кількість членів із від'ємними степенями $(z - z_0)$;

3) **істотно особливою** точкою, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ — не існує. Тоді в головній частині ряду Лорана міститься нескінченна кількість членів із від'ємними степенями $(z - z_0)$.

Для того щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$ необхідно й достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було зобразити у вигляді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$, де $\varphi(z)$ регулярна в точці z_0 , причому $\varphi(z_0) \neq 0$. Число n — номер старшого члена головної частини ряду Лорана — називається **порядком полюса**. Очевидно, що функція $\frac{1}{f(z)}$ буде мати в точці z_0 нуль n -го порядку.

Класифікація типів **нескінченно віддаленої особливої точки** $z = \infty$ аналогічна випадку скінчених особливих точок. Але, з урахуванням означення правильної і головної частин ряду Лорана, в околі $z = \infty$ маємо

- точка $z = \infty$ буде **усувною особливою точкою** для функції $f(z)$, якщо її розвинення в ряд Лорана матиме вигляд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}$, тобто $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C_0$;

- точка $z = \infty$ буде **полюсом** порядку m , якщо

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} C_k z^k = \sum_{k=1}^m C_{-k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{z^k}, \text{ де } C_{-m} \neq 0,$$

тобто $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$;

- точка $z = \infty$ буде **істотно особливою** точкою, якщо в головній частині ряду Лорана $\sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k$ міститься нескінченна кількість доданків.

Завдання: знайти особливі точки функції і визначити їх тип.

Приклад 5.1

Визначити тип особливої точки $z_0 = 0$ функції $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}$.

Розв'язання. Зображуючи функцію $\cos z$ у вигляді ряду Тейлора за степенями z , отримаємо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^7} \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2!z^5} - \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{6!z} - \frac{z}{8!} + \frac{z^3}{10!} - \dots, \end{aligned}$$

що є розвиненням функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі нуля. Воно вміщує скінченну кількість членів із від'ємними степенями z . Звідси точка $z_0 = 0$ — полюс п'ятого порядку, оскільки найбільший показник від'ємного степеня в z дорівнює 5.

$$5.1.1. \quad f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}.$$

$$5.1.13. \quad f(z) = \frac{\ln(1 + z^3)}{z^2}.$$

$$5.1.2. \quad f(z) = \cos z - 1.$$

$$5.1.14. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2}.$$

$$5.1.3. \quad f(z) = z^5 + z^3.$$

$$5.1.15. \quad f(z) = (z - 2)e^{\frac{1}{z-2}}.$$

$$5.1.4. \quad f(z) = e^z - 1.$$

$$5.1.16. \quad f(z) = \frac{1}{\cos z - 1 + z^2/2}.$$

$$5.1.5. \quad f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}.$$

$$5.1.17. \quad f(z) = \frac{1}{e^{-z} + z - 1}.$$

$$5.1.6. \quad f(z) = \frac{1 - \cos z}{z + 1}.$$

$$5.1.18. \quad f(z) = \frac{1}{z - \sin z}.$$

$$5.1.7. \quad f(z) = z - \sin z.$$

$$5.1.19. \quad f(z) = \frac{1}{\sin z^2}.$$

$$5.1.8. \quad f(z) = \frac{\cos z}{z}.$$

$$5.1.20. \quad f(z) = \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}.$$

$$5.1.9. \quad f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

$$5.1.21. \quad f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z - 1)^3}.$$

$$5.1.10. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^3}.$$

$$5.1.22. \quad f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}.$$

$$5.1.11. \quad f(z) = \frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}.$$

$$5.1.23. \quad f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}.$$

$$5.1.12. \quad f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}.$$

$$5.1.24. \quad f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}.$$

$$5.1.25. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z + \pi}.$$

$$5.1.26. \quad f(z) = \frac{\sin z^2}{z(z^3 + 1)} e^{1/z}.$$

$$5.1.27. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}.$$

$$5.1.28. \quad f(z) = \frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{z^2}.$$

$$5.1.29. \quad f(z) = e^{1/z^2}.$$

$$5.1.30. \quad f(z) = \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}.$$

$$5.1.31. \quad f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}.$$

$$5.1.32. \quad f(z) = \operatorname{ctg} 1/z - 1/z^2.$$

$$5.1.33. \quad f(z) = \frac{e^{1/z}}{(e^z - 1)(1 - z)^3}.$$

$$5.1.34. \quad f(z) = z \operatorname{sh} \frac{1}{z}.$$

$$5.1.35. \quad f(z) = \frac{z^2}{(z^2 - 4)^2 \cos \frac{1}{z-2}}.$$

$$5.1.36. \quad f(z) = \cos 1/z.$$

$$5.1.37. \quad f(z) = \frac{e^{z+e}}{z + e}.$$

$$5.1.38. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z} + \sin \frac{2 - z\pi}{2z}.$$

$$5.1.39. \quad f(z) = \frac{z \cos \frac{1}{z}}{\cos z - 1}.$$

$$5.1.40. \quad f(z) = \operatorname{th} z.$$

Завдання: визначити тип особливої точки $z = \infty$ функції.

$$5.1.41. \quad f(z) = \frac{z^7}{(z^2 - 4)^2 \cos \frac{1}{z-2}}.$$

$$5.1.46. \quad f(z) = e^{\operatorname{ctg} \frac{1}{z}}.$$

$$5.1.42. \quad f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}.$$

$$5.1.47. \quad f(z) = e^{\operatorname{tg} \frac{1}{z}}.$$

$$5.1.43. \quad f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{z}.$$

$$5.1.48. \quad f(z) = \sin \frac{1}{1 - z}.$$

$$5.1.44. \quad f(z) = \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

$$5.1.49. \quad f(z) = \sin \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \right).$$

$$5.1.45. \quad f(z) = e^{-z} \cos \frac{1}{z}.$$

$$5.1.50. \quad f(z) = \sin \left(\frac{1}{\cos \frac{1}{z}} \right).$$

5.2. Лишки та їх обчислення

Нехай z_0 — скінченна ізолювана особлива точка функції $f(z)$. **Лишком** функції $f(z)$ у точці z_0 називається число, яке позначається символом $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$ або $\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=z_0}$, або $\operatorname{res}[f(z), z_0]$ і визначається рівністю

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,$$

де замкнений контур інтегрування γ належить області регулярності функції $f(z)$ і не містить у собі інших особливих точок функції $f(z)$, крім z_0 .

Зважаючи на те, що лишки частіше застосовують для обчислення інтегралів, більш зручне є зображення їх через коефіцієнти ряду Лорана: *лишок функції дорівнює коефіцієнту C_{-1} при першому від'ємному степені (тобто при $\frac{1}{z - z_0}$) у лоранівському розвиненні $f(z)$ в околі точки z_0 .*

Для **скінченних особливих точок** ($z_0 \neq \infty$) лишки функції $f(z)$ знаходять за такими правилами:

- лишок в усуній скінченній особливій точці дорівнює нулю;
- лишок у полюсі n -го порядку обчислюють за формулою

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n];$$

- для лишку у простому полюсі (при $n = 1$) маємо

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)];$$

- лишок у простому полюсі для мероморфних функцій $f(z) = \frac{F(z)}{\varphi(z)}$, тобто таких, що утворені діленням двох регулярних функцій, дорівнює

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=z_0} = \frac{F(z_0)}{\varphi'(z_0)}, \quad F(z_0) \neq 0;$$

- якщо точка z_0 — істотно особлива точка, то лишок знаходять як коефіцієнт C_{-1} лоранівського розвинення $f(z)$ в околі цієї точки.

У **нескінченно віддаленій точці** $z = \infty$ лишок визначається за формулою

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,$$

де γ — замкнений контур, що охоплює точку $z = \infty$ і має додатний напрям.

З цього означення випливає:

- лишок функції $f(z)$ у нескінченно віддаленій точці дорівнює взятому зі знаком "мінус" коефіцієнту при $\frac{1}{z}$ у лоранівському розвиненні функції в околі точки $z = \infty$;
- зважаючи на те, що правдива узагальнена теорема про лишки — сума лишків функції у всіх її особливих точках, включаючи і нескінченно віддалену точку, дорівнює нулю $\sum_i^n \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=a_i} + \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty} = 0$, — лишок у точці $z = \infty$ можна обчислити за формулою

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty} = - \sum_i^n \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=a_i} ;$$

- якщо $z = \infty$ — усувна особлива точка для функції $f(z)$, тобто $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq \infty$, то з її розвинення в ряд Лорана

$$f(z) = C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots, \text{ де } C_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$$

одержимо формулу

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty} = -C_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} (f(\infty) - f(z))z.$$

Приклад 5.2

Обчислити $\operatorname{res} \frac{1}{z^2 - 1} \Big|_{z=1}$.

Перший спосіб розв'язання. Задана функція має прості полюси в точках $z = 1$ і $z = -1$, тому вона регулярна в кільці $0 < |z - 1| < 2$. Її розвинення в ряд Лорана в цьому кільці:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2((z-1)+2)} = \\ &= \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{z-1}{2} \right)} = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n}. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } \operatorname{res} \frac{1}{z^2 - 1} \bigg|_{z=1} = C_{-1} = \frac{1}{2}.$$

Другий спосіб розв'язання. Точка $z = 1$ є для функції $f(z)$ простим полюсом, тому

$$\operatorname{res} \frac{1}{z^2 - 1} \bigg|_{z=1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2 - 1} (z - 1) = \frac{1}{z + 1} \bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}.$$

Також можна застосувати правило знаходження лишків для мероморфних функцій із простим полюсом:

$$\operatorname{res} \frac{1}{z^2 - 1} \bigg|_{z=1} = \frac{1}{(z^2 - 1)'} \bigg|_{z=1} = \frac{1}{2z} \bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 5.3

Обчислити лишки функцій $f(z) = \frac{1}{z^7 + 1}$ і $g(z) = e^{1/z}$ у нескінченно віддаленій особливій точці.

Розв'язання. Функція $f(z) = \frac{1}{z^7 + 1}$ регулярна в точці $z = \infty$, оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq \infty$. Для знаходження лишку побудуємо ряд Лорана методом ділення "у стовпчик" багаточлена на багаточлен. Оскільки розвинення регулярної функції в околі $z = \infty$ відбувається за від'ємними степенями z , то багаточлен, на який будемо ділити, запишемо в порядку спадання степенів:

$$\begin{array}{r} 1 \mid z^7 + 1 \\ -1 - 1/z^7 \\ \hline -1/z^7 \\ \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} 1/z^7 - 1/z^{14} + \dots \end{array}$$

Із цього розвинення бачимо, що для даної функції точка $z = \infty$ є регулярною точкою і, оскільки коефіцієнт $C_{-1} = 0$, то $\operatorname{res} \frac{1}{z^7 + 1} \bigg|_{z=\infty} = 0$.

Для функції $g(z) = e^{1/z}$ точка $z = \infty$ теж буде регулярною точкою. Застосовуючи відоме розвинення для експоненти, матимемо

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots, \quad \operatorname{res} \left(e^{1/z} \right) \bigg|_{z=\infty} = -C_{-1} = -1.$$

Тобто лишок в усуній особливій нескінченно віддаленій точці не завжди дорівнює нулю.

Приклад 5.4

Визначити тип особливих точок функції $f(z) = z^2 e^{1/z}$ і знайти в них лишки.

Розв'язання. Особливими точками цієї функції будуть $z = 0$ і $z = \infty$. Побудуємо ряд Лорана за допомогою відомого розвинення для експоненціальної функції:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right) = \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-2}} + \dots + \end{aligned}$$

У випадку $z = 0$ правильна частина містить три доданки $z^2 + z + \frac{1}{2!}$, а

головна частина має вигляд $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(2-n)!}$. Отже, $z = 0$ — істотно особлива

точка. Коефіцієнт C_{-1} дорівнює $C_{-1} = 1/6$, тобто $\operatorname{res} \left(z^2 e^{1/z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{6}$.

У випадку $z = \infty$ уже головна частина містить скінченну кількість доданків $z^2 + z$, а правильна частина має вигляд $\sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(2-n)!}$. Отже, $z = \infty$ —

поліус другого порядку. Коефіцієнт $C_{-1} = 1/6$, тобто $\operatorname{res} \left(z^2 e^{1/z} \right) \Big|_{z=\infty} = -\frac{1}{6}$.

Легко переконатися, що сума всіх лишків у розширеній комплексній площині дорівнює нулю.

Приклад 5.5

Визначити тип особливих точок функції $f(z) = \frac{\sin z}{z^4(z - \pi)}$ і знайти в них лишки.

Розв'язання. Точка $z = 0$ буде нулем і чисельника, і знаменника. Визначимо порядок нуля чисельника. Із розвинення $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right)$ бачимо, що нуль першого порядку. Отже, $z = 0$ для функції $f(z)$ — поліус третього порядку. Для знаходження лишку зобразимо $f(z)$ у вигляді ряду Лорана:

$$\frac{\sin z}{z^4(z - \pi)} = -\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{\pi z^4 \left(1 - \frac{z}{\pi} \right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{z^4\pi} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left(1 + \frac{z}{\pi} + \frac{z^2}{\pi^2} + \dots \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi z^3} - \frac{1}{\pi^2 z^2} + \frac{1}{z\pi} \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \dots
\end{aligned}$$

$$\text{Звідси } \operatorname{res} \left(\frac{\sin z}{z^4(z-\pi)} \right) \Big|_{z=0} = C_{-1} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{\pi^2} \right).$$

Точка $z = \pi$ буде усувною особливою точкою, оскільки $\sin z = \sin(z - \pi)$ і $\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{\sin(z - \pi)}{z - \pi} = 1$, тому $\operatorname{res} \left(\frac{\sin z}{z^4(z-\pi)} \right) \Big|_{z=\pi} = 0$.

Зважаючи на те, що $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin z$ не існує, точка $z = \infty$ буде істотно особливою точкою, в околі якої розвинення в ряд Лорана матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\sin z}{z^4(z-\pi)} &= \frac{\sin z}{z^5 \left(1 - \frac{\pi}{z} \right)} = \frac{1}{z^5} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left(1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{z^2} + \dots \right) = \\
&= \dots + \frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{5!} - \frac{\pi^3}{7!} + \frac{\pi^5}{9!} - \dots \right) + \dots = \dots + \frac{1}{z\pi^4} \left(\frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots \right) + \dots
\end{aligned}$$

Оскільки $\sin \pi = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \dots = 0$, то $C_{-1} = \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{\pi^3}{3!} - \pi \right)$. Отже,

$$\operatorname{res} \left(\frac{\sin z}{z^4(z-\pi)} \right) \Big|_{z=\infty} = -C_{-1} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{3!} \right).$$

Зауважимо, що цей результат можна одержати і за узагальненою теоремою про лишки

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty} + \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=0} = 0.$$

Завдання: визначити тип особливих точок функції на розширеній комплексній площині і знайти в них лишки.

$$5.2.1. \quad f(z) = \operatorname{tg} z.$$

$$5.2.6. \quad f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 5}.$$

$$5.2.2. \quad f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3(z^2+1)(z-2)}.$$

$$5.2.7. \quad f(z) = \frac{z}{\sin z}.$$

$$5.2.3. \quad f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

$$5.2.8. \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^3}.$$

$$5.2.4. \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}.$$

$$5.2.9. \quad f(z) = \frac{e^z}{\sin z}.$$

$$5.2.5. \quad f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

$$5.2.10. \quad f(z) = e^{1/z}.$$

$$\begin{array}{ll}
5.2.11. & f(z) = \frac{\sin 2z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}. \\
5.2.12. & f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - z - 2}. \\
5.2.13. & f(z) = \frac{e^z}{(z - 1)^2(z + 2)^3}. \\
5.2.14. & f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}. \\
5.2.15. & f(z) = \frac{1}{z^6(z^2 + 1)^2}. \\
5.2.16. & f(z) = \frac{ze^z}{(z - 4)^3}. \\
5.2.17. & f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)}. \\
5.2.18. & f(z) = \frac{\sin 2z}{(z + 1)^3}. \\
5.2.19. & f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}. \\
5.2.20. & f(z) = \operatorname{ctg}^2 z. \\
5.2.21. & f(z) = \cos \frac{1}{z - 2}. \\
5.2.22. & f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z - 2}. \\
5.2.23. & f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}. \\
5.2.24. & f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}. \\
5.2.25. & f(z) = \sin \frac{z}{z + 1}. \\
5.2.26. & f(z) = \frac{\sin 2z}{(z + i)(z - i/2)^2}. \\
5.2.27. & f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}. \\
5.2.28. & f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}. \\
5.2.29. & f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}. \\
5.2.30. & f(z) = \frac{z^{2n}}{(1 + z)^4}, \quad n \in \mathbb{N}. \\
5.2.31. & f(z) = \frac{1}{z(1 - z^2)}. \\
5.2.32. & f(z) = \cos \frac{z^2 + 4z - 1}{z + 3}. \\
5.2.33. & f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{-z})}. \\
5.2.34. & f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}, \quad n \in \mathbb{N}. \\
5.2.35. & f(z) = \frac{1}{\sin 1/z}. \\
5.2.36. & f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}. \\
5.2.37. & f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \\
5.2.38. & f(z) = \frac{2z + 5}{z^4 - 4z^2 + 4}. \\
5.2.39. & f(z) = \frac{1}{2 \sin 2z}. \\
5.2.40. & f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z - \pi)}.
\end{array}$$

5.3. Обчислення контурних інтегралів за допомогою лишків

Застосування основної теореми теорії лишків

Теорема Коші (основна теорема теорії лишків). Якщо функція $f(z)$ регулярна в однозв'язній області D , за винятком скінченного числа ізолюваних особливих точок $z_1, z_2, \dots, z_n$, то виконується рівність

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z),$$

де γ — простий замкнений контур, що належить області D і обходить особливі точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ у додатному напрямку.

Приклад 5.6

Обчислити $\oint_{|z|=1} z^m e^{\left(\frac{1}{z}\right)} dz, (m \in \mathbb{N})$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є регулярна на контурі інтегрування і у внутрішності контуру, за винятком точки $z = 0$, в якій функція має істотну особливість. Тому

$$\oint_{|z|=1} z^m e^{\left(\frac{1}{z}\right)} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \left(z^m e^{\left(\frac{1}{z}\right)} \right).$$

Для знаходження лишку в істотно особливій точці зобразимо підінтегральну функцію у вигляді ряду Лорана:

$$z^m e^{\left(\frac{1}{z}\right)} = z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k} = z^m + \frac{z^{m-1}}{1!} + \dots + \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!z} + \dots,$$

звідси $\operatorname{res}_{z=0} \left(z^m e^{\left(\frac{1}{z}\right)} \right) = \frac{1}{(m+1)!}$. Остаточно $\oint_{|z|=1} z^m e^{\left(\frac{1}{z}\right)} dz = \frac{2\pi i}{(m+1)!}$.

Приклад 5.7

Обчислити $\oint_{|z-i|=2} \frac{\sin(1/z)}{z^2 + 4} dz$.

Розв'язання. Особливими точками підінтегральної функції будуть: $z = 0$ — істотно особлива точка, $z = \pm 2i$ — прості полюси. Але у внутрішність кола $|z - i| = 2$ потрапляють тільки точки $z = 0$ і $z = 2i$, тому

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{\sin(1/z)}{z^2 + 4} \right) + \operatorname{res}_{z=2i} \left(\frac{\sin(1/z)}{z^2 + 4} \right) \right).$$

Для знаходження лишку в точці $z = 0$ запишемо розвинення підінтегральної функції в ряд Лорана

$$\begin{aligned}\frac{\sin(1/z)}{z^2 + 4} &= \frac{1}{4} \frac{\sin(1/z)}{1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \dots \right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^4} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{4z} \left(1 + \frac{1}{2^2 3!} + \frac{1}{2^4 5!} + \dots \right) + \dots = \\ &= \frac{1}{2z} \left(\frac{1}{2} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^5}{5!} + \dots \right) + \dots\end{aligned}$$

$$\text{Звідси } \operatorname{res} \left(\frac{\sin(1/z)}{z^2 + 4} \right) \Big|_{z=0} = C_{-1} = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(1/2).$$

Для точки $z = 2i$ за формулою для знаходження лишку мероморфної функції у простому полюсі знайдемо

$$\operatorname{res} \left(\frac{\sin(1/z)}{z^2 + 4} \right) \Big|_{z=2i} = \frac{\sin(1/z)}{(z^2 + 4)'} \Big|_{z=2i} = \frac{\sin(1/z)}{2z} \Big|_{z=2i} = -\frac{1}{4} \operatorname{sh}(1/2).$$

Отже,

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \operatorname{sh}(1/2) = \frac{\pi i}{2} \operatorname{sh}(1/2).$$

Завдання: обчислити інтеграл за допомогою лишків.

$$5.3.1. \oint_{|z-3i|=4} \frac{dz}{e^z - 1}.$$

$$5.3.2. \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 + 4z^3}.$$

$$5.3.3. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z dz}{4z - \pi}.$$

$$5.3.4. \oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)(z + 3)}.$$

$$5.3.5. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^2(z - 2)}.$$

$$5.3.6. \oint_{|z|=2} \frac{e^{2z} dz}{z(z - 1)^2(z + 3)}.$$

$$5.3.7. \oint_{(x-1)^2 + \frac{y^2}{9} = 1} \frac{z dz}{z^4 + 1}.$$

$$5.3.8. \oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{ch} 2z dz}{z^2(z + 2)(z - 1)}.$$

$$5.3.9. \oint_{|z-\frac{i\pi}{2}|=1} \frac{(z^2 + 1) dz}{\operatorname{sh} 2z}.$$

$$5.3.10. \oint_{|z|=2} \frac{2dz}{\operatorname{ch} z}.$$

$$5.3.11. \oint_{x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}.$$

$$5.3.12. \oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=1} \operatorname{ctg} 3z dz.$$

- 5.3.13. $\oint_{x^2+y^2=2x} \frac{dz}{z^4+1}.$
- 5.3.14. $\oint_{|z-i|=3} \frac{(e^{z^2}-1)dz}{z^3-iz^2}.$
- 5.3.15. $\oint_{x^2+y^2-2x} \frac{e^{2z}dz}{z^3-1}.$
- 5.3.16. $\oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z dz}{z^2-z}.$
- 5.3.17. $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}.$
- 5.3.18. $\oint_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{(z-2)(z^2+1)}.$
- 5.3.19. $\oint_{|z-3i|=4} \frac{dz}{e^z-1}.$
- 5.3.20. $\oint_{|z-2i|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(2+z)dz}{(z-2i)^2}.$
- 5.3.21. $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^5+4z^3}.$
- 5.3.22. $\oint_{|z+2|=2} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}.$
- 5.3.23. $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}.$
- 5.3.24. $\oint_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}.$
- 5.3.37. $\oint_{|z|=\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$
- 5.3.38. $\oint_L \frac{\operatorname{tg} z dz}{z^2+1}, L - \text{ромб із вершинами} \begin{cases} z_1 = 3, z_2 = 2i, \\ z_3 = -3, z_4 = -2i. \end{cases}$
- 5.3.39. $\oint_L \frac{z dz}{\cos z}, L - \text{ламана із вершинами} \begin{cases} z_1 = -i, z_2 = 2-i, \\ z_3 = 2+i, z_4 = i. \end{cases}$
- 5.3.25. $\oint_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z-3)^2}.$
- 5.3.26. $\oint_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz.$
- 5.3.27. $\oint_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{1/z} dz.$
- 5.3.28. $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}.$
- 5.3.29. $\oint_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z+3}.$
- 5.3.30. $\oint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1} \frac{\cos \frac{z}{2} dz}{z^2-4}.$
- 5.3.31. $\oint_{x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)}.$
- 5.3.32. $\oint_{\frac{x^2}{4}+y^2=1} \frac{\sin \pi z dz}{(z^2-1)^3}.$
- 5.3.33. $\oint_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3}.$
- 5.3.34. $\oint_{x^2+y^2=16} \frac{(z+1)dz}{z^2+2z-3}.$
- 5.3.35. $\oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}.$
- 5.3.36. $\oint_{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1} \frac{z \sin z dz}{(z-1)^5}.$

$$5.3.40. \oint_L \frac{e^{zi} dz}{\sin 2z}, \quad L - \text{ромб із вершинами } z_1 = 2, z_2 = i, z_3 = -2, z_4 = -i.$$

Застосування узагальненої теореми про лишки

Якщо у внутрішність контуру інтегрування потрапляє більше особливих точок, ніж зовні, або обчислення лишків у цих точках викликає труднощі, доцільно застосувати **узагальнену теорему про лишки**

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z) \Big|_{z_k} + \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty} = 0.$$

і перейти до обчислення лишків у нескінченно віддаленій точці та в тих особливих точках, які не потрапляють у внутрішність контуру інтегрування.

Приклад 5.8

$$\text{Обчислити } I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^{10} - 1)^2}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція має у внутрішності кола $|z| = 2$ десять кратних полюсів, що робить обчислення інтеграла за допомогою безпосереднього підрахування лишків майже неможливим. Однак застосування теореми про суму лишків у розширеній комплексній площині зводить проблему обчислення інтеграла до знаходження лишку тільки в нескінченно віддаленій точці

$$\sum_{k=1}^{10} \operatorname{res} \frac{1}{(z^{10} - 1)^2} \Big|_{z_k} = -\operatorname{res} \frac{1}{(z^{10} - 1)^2} \Big|_{z=\infty}.$$

Підінтегральна функція в нескінченності має нуль двадцятого порядку. Тому розвинення в ряд Лорана в околі $z = \infty$ містить тільки від'ємні степені, починаючи з двадцятого. Оскільки $C_{-1} = 0$, то лишок у нескінченно віддаленій точці дорівнює нулю. Отже, $I = 0$.

Приклад 5.9

$$\text{Обчислити інтеграл } I = \oint_{|z-1|=1} \frac{\cos\left(\frac{z\pi}{2z-1}\right) dz}{(z-2)(z-1)^5}.$$

Розв'язання. Особливі точки підінтегральної функції: $z = 2$ — простий полюс, $z = 1$ — полюс кратності $n = 5$, $z = 1/2$ — істотно особлива точка. Точка $z = 2$ не входить в область $|z - 1| = 1$, а точки $z = 1$ і $z = 1/2$ — входять. Тому, щоб не обчислювати лишки в істотно особливій точці й

кратному полюсі, застосуємо узагальнену теорему про лишки

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=1} + \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=1/2} = -\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=2} - \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty}.$$

Лишок у простому полюсі $z = 2$ дорівнює

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=2} = \frac{\cos \left(\frac{z\pi}{2z-1} \right)}{(z-1)^5} \Big|_{z=2} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Точка $z = \infty$ — усувна особлива точка, для якої $f(\infty) = 0$. Тоді за формулою для обчислення лишку в нескінченно віддаленій точці усувного типу маємо

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z=\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} (f(\infty) - f(z))z = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \cos \left(\frac{z\pi}{2z-1} \right)}{(z-2)(z-1)^5} = 0.$$

$$\text{Отже, } I = -2\pi i \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=2} = -2\pi i(-1/2) = \pi i.$$

Завдання: обчислити інтеграл за допомогою узагальненої теореми про лишки.

$$5.3.41. \oint_{|z|=1.5} \frac{dz}{(z+2)(z^7-1)}.$$

$$5.3.42. \oint_{|z|=2} \frac{z^2+z+1}{z^2(z-1)} dz.$$

$$5.3.43. \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z^2+4)} dz.$$

$$5.3.44. \oint_{|z|=2} \frac{z^2}{z^2+1} dz.$$

$$5.3.45. \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^3-z^5}.$$

$$5.3.46. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z(1-z^2)}.$$

$$5.3.47. \oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz.$$

$$5.3.48. \oint_{|z|=2} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz.$$

$$5.3.49. \oint_{|z|=3} \frac{z^{17} dz}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4}.$$

$$5.3.50. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}.$$

$$5.3.51. \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}.$$

$$5.3.52. \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}.$$

$$5.3.53. \oint_{|z|=5} \frac{dz}{(z-4)^5(z+3)^4}.$$

$$5.3.54. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4-1)(z^5+1)}.$$

$$5.3.55. \oint_{|z|=2} \frac{z^2 + 1}{z^3} dz.$$

$$5.3.56. \oint_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$5.3.57. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(1 + z^{12})^3}.$$

$$5.3.58. \oint_{|z|=3} \frac{z^3}{(z - 1)^3(z^4 + 1)}.$$

$$5.3.59. \oint_{|z|=1.5} \frac{dz}{z^{16} - 1}.$$

$$5.3.60. \oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z^{11} + 1)(z - 2)^3}.$$

5.4. Логарифмічний лишок. Принцип аргументу

Логарифмічною похідною функції $f(z)$ називається функція $\varphi(z)$, що є похідна від логарифма функції $f(z)$

$$\varphi(z) = [\operatorname{Ln} f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Особливими точками функції $\varphi(z)$ можуть бути тільки нулі або полюси функції $f(z)$.

Логарифмічним лишком функції $f(z)$ відносно замкненого контуру γ називається лишок її логарифмічної похідної, який дорівнює $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ регулярна в обмеженій однозв'язній області D , за винятком скінченного числа полюсів, і не має ні нулів, ні полюсів на межі γ цієї області. Тоді має місце формула

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

де N – число нулів, а P – число полюсів функції $f(z)$ у D з урахуванням їх порядків.

Дану теорему називають ще **принципом аргументу**, оскільки її можна сформулювати через означення логарифма так: логарифмічний лишок функції $f(z)$ відносно замкненого контуру γ дорівнює приросту $\Delta_{\gamma} \arg f(z)$ аргументу $f(z)$ при обході контуру γ у додатному напрямку, поділеному на 2π

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d(\ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d(\ln |f(z)|) + \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d(\arg f(z)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z) = N - P. \end{aligned}$$

Завдання: знайти логарифмічний лишок функції.

Приклад 5.10

Знайти логарифмічний лишок функції $f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ відносно кола $|z| = \pi$.

Розв'язання. З рівняння $1+z^2=0$ визначимо нулі чисельника: $a_1 = -i$, $a_2 = i$. Очевидно, що ці нулі прості. З рівняння $1-\cos 2\pi z = 0$ знайдемо нулі знаменника: $z_n = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Кратність цих нулів дорівнює 2, тому що $(1-\cos 2\pi z)' \Big|_{z=n} = 2\pi \sin 2\pi z \Big|_{z=n}$, $(\sin 2\pi z)' \Big|_{z=n} \neq 0$. Оскільки нулі чисельника не збігаються з нулями знаменника, у внутрішності кола $|z| = \pi$ задана функція має два простих нуля і сім полюсів кратності 2, тобто $N = 2$, $P = 14$. Отже, для логарифмічного лишка даної функції відносно кола $|z| = \pi$ маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 14 = -12.$$

Приклад 5.11

Знайти логарифмічний лишок функції $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \pi z^2/4}$ відносно кола $|z| = \pi$.

Розв'язання. Для чисельника з рівняння $\sin z^2 = 0$ знайдемо: $z = 0$ — нуль другого порядку і прості нулі в точках $z = \pm\sqrt{n\pi}$ і $z = \pm i\sqrt{n\pi}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Для знаменника з рівняння $z^3 - \frac{\pi}{4}z^2 = 0$ маємо: $z = 0$ — нуль другого порядку і простий нуль у точці $\frac{\pi}{4}$.

Оскільки $z = 0$ є нуль і чисельника, і знаменника, то розглянемо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi},$$

тобто $z = 0$ — усувна особлива точка.

Таким чином, у внутрішність кола $|z| = \pi$ потрапляють прості нулі функції $f(z)$ у точках $z = \pm\sqrt{n\pi}$, $z = \pm i\sqrt{n\pi}$, $n = 1, 2, 3$ і полюс у точці $z = \frac{\pi}{4}$.

Отже, логарифмічний лишок функції $f(z)$ відносно кола $|z| = \pi$ дорівнює

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 12 - 1 = 11.$$

Рекомендації до виконання: спочатку слід знайти нулі чисельника і знаменника, які потрапляють у внутрішність контуру, визначити їх кра-

тність. У випадку, коли нулі чисельника і знаменника збігаються, необхідно дослідити поведінку функції в цій точці. Далі слід застосувати теорему про логарифмічний лишок.

$$\begin{array}{ll}
5.4.1. & f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{e^{iz} - 1}, \quad \gamma : |z| = 8. \\
5.4.2. & f(z) = \frac{z}{1 + z^3}, \quad \gamma : |z| = 2. \\
5.4.3. & f(z) = \operatorname{th} z, \quad \gamma : |z| = 8. \\
5.4.4. & f(z) = \operatorname{tg}^3 z, \quad \gamma : |z| = 6. \\
5.4.5. & f(z) = \frac{\sin z}{1 + z^3}, \quad \gamma : |z| = 2. \\
5.4.6. & f(z) = \frac{z^4}{1 + z^4}, \quad \gamma : |z| = 2. \\
5.4.7. & f(z) = \operatorname{tg}^2 z, \quad \gamma : |z| = \pi. \\
5.4.8. & f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}, \quad \gamma : |z| = \pi. \\
5.4.9. & f(z) = \frac{1}{z - z^3}, \quad \gamma : |z| = 4. \\
5.4.10. & f(z) = \frac{\sin z}{z - z^3}, \quad \gamma : |z| = 2. \\
5.4.11. & f(z) = \frac{1 + z^3}{1 - \sin 2\pi z}, \quad \gamma : |z| = \pi. \\
5.4.12. & f(z) = \cos z + \sin z, \quad \gamma : |z| = 4. \\
5.4.13. & f(z) = (e^z - 2)^2, \quad \gamma : |z| = 8. \\
5.4.14. & f(z) = \frac{z^5}{(1 - z)^2}, \quad \gamma : |z| = 5. \\
5.4.15. & f(z) = \frac{\cos z}{z - z^3}, \quad \gamma : |z| = 4. \\
5.4.16. & f(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad \gamma : |z| = 3. \\
5.4.17. & f(z) = 1 - \operatorname{tg}^2 z, \quad \gamma : |z| = 2. \\
5.4.18. & f(z) = \frac{z - z^2}{1 - \cos z}, \quad \gamma : |z| = 5. \\
5.4.19. & f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)^2}, \quad \gamma : |z| = 3. \\
5.4.20. & f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}, \quad \gamma : |z| = 2\pi.
\end{array}$$

5.5. Визначення числа нулів багаточлена в півплощині

Одним із застосувань принципу аргументу є знаходження числа нулів багаточлена у правій і лівій півплощинах. Для цього обирають контур у вигляді півкола $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Re} z > 0\}$ або $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Re} z < 0\}$ досить великого радіуса R , щоб усі шукані нулі потрапили в півколо, і відрізка уявної осі $[-iR, iR]$.

Для обчислення приросту аргументу $\Delta_{C_R} \arg P_n(z)$ багаточлен $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ зображують у вигляді $P_n(z) = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right)$.

Тоді

$$\Delta_{C_R} \arg P_n(z) = \Delta_{C_R} \arg z^n + \Delta_{C_R} \arg \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right).$$

Оскільки $\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, то початок координат не обходиться і $\Delta_{C_R} \arg \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}\right) \rightarrow 0$, у той час як $\Delta_{C_R} \arg z^n =$

$$n\Delta_{C_R} \arg z = n\pi.$$

Для визначення $\Delta_{[-iR, iR]} \arg P_n(z)$ записують параметричне рівняння для уявної осі $z = it$, $t \in (-\infty, \infty)$, підставляють його у вираз для багаточлена $w = P_n(it)$ і відокремлюють дійсну й уявну частини $U = \operatorname{Re} P(w) = U(t)$, $V = \operatorname{Im} P(w) = V(t)$. Далі знаходять кут, на який повернувся вектор $w(t)$, з можливими обертами навколо нуля, при переміщенні від $t = +\infty$ до $t = -\infty$ для правої півплощини і від $t = -\infty$ до $t = +\infty$ для лівої. Основна трудність при цьому полягає у правильній побудові образу багаточлена на площині w , тобто кривої $U = U(t)$, $V = V(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Приклад 5.12

Знайти число нулів багаточлена $P(z) = z^3 - 1$ у правій $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ і лівій $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ півплощинах.

Розв'язання. Спочатку розглянемо випадок правої півплощини. Для застосування принципу аргументу необхідно обрати замкнений контур інтегрування. Оскільки для багаточлена $z^3 - 1$ не існує суто уявних коренів $z = iy$, контур інтегрування γ оберемо як відрізок $[iR, -iR]$ уявної осі й півкола $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Re} z > 0\}$ настільки великого радіуса, щоб усі шукані нулі потрапили всередину контуру γ .

Застосовуючи принцип аргументу для числа нулів у правій півплощині, маємо

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg P(z) = \frac{1}{2\pi} (\Delta_{C_R} \arg P(z) + \Delta_{[iR, -iR]} \arg P(z)).$$

Якщо $R \rightarrow \infty$, то

$$\Delta_{C_R} \arg P(z) \sim \Delta_{C_R} \arg z^3 = 3\Delta_{C_R} \arg z = 3\pi.$$

Для обчислення приросту аргументу на відрізку $[iR, -iR]$ позначимо $z = it$ ($-R \leq t \leq R$). Тоді $w(t) = P_3(z) = z^3(t) - 1 = U(t) + iV(t) = -1 - it^3$, звідси $U = -1$, $V = -t^3$, що задає пряму на комплексній площині (рис. 2).

Значення w багаточлена прямує вздовж цієї лінії від точки $w(R) = -1 - iR^3$ до $w(-R) = -1 + iR^3$, тобто вектор $w = P_3(z)$ робить поворот у від'ємному напрямку на кут φ . З рисунка бачимо, що при $R \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow \pi$. Таким чином, для приросту аргументу маємо

$$\Delta_{[iR, -iR]} \arg P(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi.$$

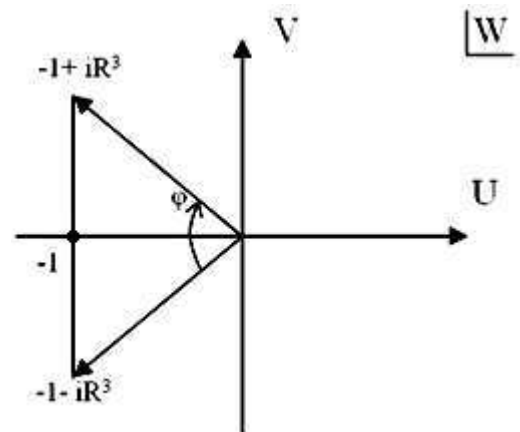


Рис. 2

Отже, у правій півплощині знаходиться тільки один нуль багаточлена

$$N = \frac{1}{2\pi}(3\pi - \pi) = 1,$$

у чому легко переконатися розглядаючи явні значення коренів рівняння

$$z^3 = 1, z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для випадку лівої півплощини ($\operatorname{Re} z < 0$) контур C_R оберемо теж у вигляді півкола, але вже в лівій півплощині, $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Re} z < 0\}$. При $R \rightarrow \infty$ знову маємо

$$\Delta_{C_R} \arg P(z) = 3\pi.$$

Але проходження відрізка уявної осі $[iR, -iR]$ зараз йде в протилежному напрямку, ніж у попередньому випадку, тому

$$\Delta_{[iR, -iR]} \arg P(z) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Отже, у лівій півплощині розташовані два нулі багаточлена:

$$N = \frac{1}{2\pi}(3\pi + \pi) = 2.$$

Ці нулі відповідають кореням багаточлена z_2 і z_3 .

Приклад 5.13

Знайти кількість нулів багаточлена $P(z) = z^{12} - z + 1$ у правій $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ півплощині.

Розв'язання. Для даного багаточлена теж не існує суто уявних коренів $z = iy$, тому контур інтегрування γ складається з відрізка уявної осі $[-iR, iR]$ і півкола $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Re} z > 0\}$.

При $R \rightarrow \infty$ $\Delta_{C_R} \arg(z^{12} - z + 1) \sim \Delta_{C_R} \arg z^{12} = 12\pi$. Покладемо $z = it$ ($-R \leq t \leq R$), тоді $w = z^{12} - z + 1 = t^{12} - it + 1 = U + iV$, звідси $U = t^{12} + 1$, $V = -t$, що задає криву, показану на рис. 3.

Оскільки контур γ на уявній осі проходить від точки $z = +iR$ до точки $z = -iR$, правило обходу одержаної кривої буде від $w = R^2 + 1 - iR$ до $w = R^2 + 1 + iR$. Зважаючи на те, що кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $w(t)$ при $t = \pm\infty$ дорівнює $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{-t}{t^{12} + 1} = 0$, вектор $w(t)$ рухається вздовж замкненої кривої і не обходить початок, тому $\Delta_{[-iR, iR]} \arg(z^{12} - z + 1) = 0$. Отже, у правій півплощині розташовано $N = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$ нулів даного багаточлена.

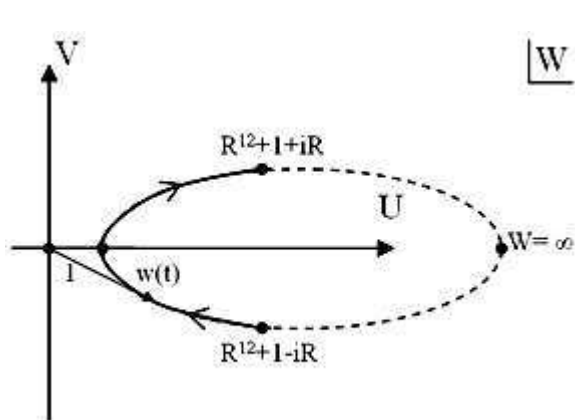


Рис. 3

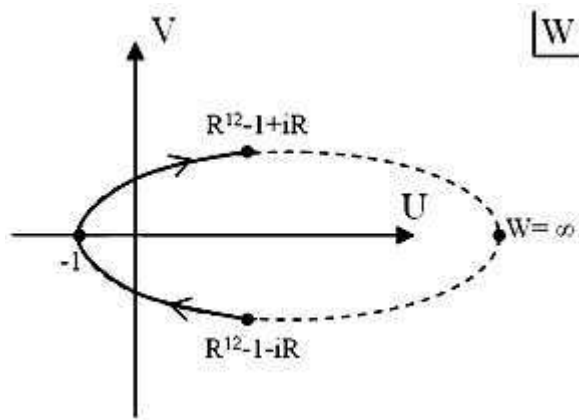


Рис. 4

Для порівняння розглянемо рух радіус-вектора $w = P(z)$ для багаточлена $z^{12} - z - 1$. Оскільки вектор $w(t)$ тепер обходить початок у від'ємному напрямку (рис. 4), то $\Delta_{[-iR, iR]} \arg(z^{12} - z - 1) = -2\pi$. Отже, для багаточлена $z^{12} - z - 1$ у правій півплощині буде розташовано $N = \frac{12\pi - 2\pi}{2\pi} = 5$ нулів.

Завдання: визначити число нулів у лівій півплощині.

$$5.5.1. \quad z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0. \quad 5.5.6. \quad 2z^3 - z^2 - 7z + 5 = 0.$$

$$5.5.2. \quad z^7 - 2z - 5 = 0. \quad 5.5.7. \quad z^5 + 5z^4 - 5 = 0.$$

$$5.5.3. \quad z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0. \quad 5.5.8. \quad z^{10} - z + 1 = 0.$$

$$5.5.4. \quad z^3 - 2z - 5 = 0. \quad 5.5.9. \quad z^3 - z^2 - z - 8 = 0.$$

$$5.5.5. \quad z^3 - 4z^2 + 5 = 0. \quad 5.5.10. \quad z^5 + z^3 + z - 1 = 0.$$

Завдання: визначити число нулів у правій півплощині.

$$5.5.11. \quad z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0. \quad 5.5.16. \quad 2z^3 - z^2 - 7z + 5 = 0.$$

$$5.5.12. \quad z^4 - 2z^3 + z^2 - 1 = 0. \quad 5.5.17. \quad z^5 + 5z^4 - 5 = 0.$$

$$5.5.13. \quad z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0. \quad 5.5.18. \quad z^8 + z - 1 = 0.$$

$$5.5.14. \quad z^3 - 2z - 5 = 0. \quad 5.5.19. \quad z^3 - z^2 - z - 8 = 0.$$

$$5.5.15. \quad 2z^5 + z^4 - 6z^3 + 3z^2 + 4z + 2 = 0. \quad 5.5.20. \quad z^5 + z^3 + z - 1 = 0.$$

5.6. Теорема Руше

Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ регулярні в обмеженій однозв'язній області D і на її межі γ і якщо в усіх точках контуру γ задовольняється нерівність $|f(z)| > |\varphi(z)|$, тоді функції $f(z)$ і $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ мають в області D однакове число нулів.

Приклад 5.14

Знайти число нулів функції $F(z) = z^8 - 4z^5 + z^3 + 1$ в області $|z| < 1$.

Розв'язання. Зобразимо функцію $F(z)$ у вигляді суми двох функцій $f(z)$ і $\varphi(z)$, які оберемо, наприклад, як

$$f(z) = -4z^5, \quad \varphi(z) = z^8 + z^3 + 1.$$

Тоді на колі $|z| = 1$ будемо мати

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4, \quad |\varphi(z)| = |z^8 + z^3 + 1| \leq |z^8| + |z^3| + 1 = 3,$$

тобто виконуватиметься нерівність $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Функція $f(z) = -4z^5$ має нуль п'ятого порядку в початку координат. За теоремою Руше функція

$$F(z) = f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^3 + 1$$

теж має всередині кола $|z| = 1$ п'ять нулів.

Зауважимо, що в даній задачі, як і в деяких інших, можливий і інший вибір функцій, наприклад $f(z) = z^8 - 4z^5$, $\varphi(z) = z^3 + 1$, для яких на колі $|z| = 1$ теж виконується умова $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Але хоча рівняння $z^8 - 4z^5 = z^5(z^3 - 4) = 0$ і має вісім коренів, троє із них ($\sqrt[3]{4}$) не потрапляють всередину кола $|z| = 1$. Отже, в області $|z| < 1$ буде п'ять нулів функції $F(z)$.

Завдання: знайти кількість коренів рівняння в заданій області.

$$5.6.1. \quad z^6 - 6z + 10 = 0, \quad |z| < 1. \quad 5.6.7. \quad z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$5.6.2. \quad z^4 - 3z^3 - 1 = 0, \quad |z| < 2. \quad 5.6.8. \quad z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$5.6.3. \quad z^3 + z + 1 = 0, \quad |z| < 2. \quad 5.6.9. \quad z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0, \quad |z| > 1.$$

$$5.6.4. \quad z^5 + z^2 + 1 = 0, \quad |z| < 2. \quad 5.6.10. \quad z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0, \quad |z| < 2.$$

$$5.6.5. \quad z^8 + 6z + 10 = 0, \quad |z| < 1. \quad 5.6.11. \quad z^5 - 2z^3 + z - 1 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$5.6.6. \quad z^4 - 3z + 1 = 0, \quad |z| < 1. \quad 5.6.12. \quad z^6 - 4z^4 + z^3 + 1 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$5.6.13. \quad z^3 - 12z + 2 = 0, \quad |z| < 2. \quad 5.6.17. \quad 27z^{11} - 8z + 10 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$5.6.14. \quad z^6 - 6z + 10 = 0, \quad |z| > 1. \quad 5.6.18. \quad z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$5.6.15. \quad 2z^4 - 5z + 2 = 0, \quad |z| < 1. \quad 5.6.19. \quad z^5 - z^3 - z + 5 = 0, \quad |z| < 3.$$

$$5.6.16. \quad z^4 - 9z + 1 = 0, \quad |z| < 2. \quad 5.6.20. \quad z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0, \quad |z| < 2.$$

Приклад 5.15

Знайти число нулів функції $F(z) = z^6 + 5z^5 - z^2 + 2$ в кільці $1 < |z| < 2$.

Розв'язання. Спробуємо застосувати властивості модулів комплексних чисел ($|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$) і переконаємося, що на колі $|z| = 1$, як і на колі $|z| = 2$ нулів багаточлена немає, оскільки

$$|z^6 + 5z^5 - z^2 + 2| \geq 5|z|^5 - |z|^6 - |z|^2 - 2 > 0 \quad \text{і для } |z| = 1, \text{ і для } |z| = 2.$$

Нехай шукане число нулів у крузі дорівнює N . Тоді $N = N_1 - N_2$, де N_2 — число нулів багаточлена у крузі $|z| < 2$, а N_1 — у крузі $|z| < 1$.

Знайдемо число нулів у крузі $|z| < 1$. Розбиваючи $F(z)$ на суму функцій $f(z) = 5z^5$ і $\varphi(z) = z^6 - z^2 + 2$, на колі $|z| = 1$ маємо

$$|f(z)| = 5|z|^5 = 5, \quad |\varphi(z)| \leq |z|^6 + |z|^2 + 2 = 4.$$

Таким чином, $|f(z)| > |\varphi(z)|$ при $|z| = 1$ і можна застосувати теорему Руше. Оскільки рівняння $z^5 = 0$ у крузі $|z| < 1$ має корінь $z = 0$ кратності $n = 5$, то і багаточлен $z^6 + 5z^5 - z^2 + 2$ у цій області має п'ять нулів, тобто $N_1 = 5$.

Для застосування теореми Руше на колі $|z| = 2$ оберемо $f(z) = z^6 + 5z^5$ і $\varphi(z) = -z^2 + 2$, для яких внаслідок нерівностей

$$|f(z)| \geq 5|z|^5 - |z|^6 = 2^5(5 - 2) = 2^5 \cdot 3, \quad |\varphi(z)| \leq |z|^2 + 2 = 6, \quad |z| = 2$$

виконуються умови теореми $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

Функція $f(z) = z^6 + 5z^5 = z^5(z + 5)$ має нуль кратності $n = 5$ у точці $z = 0$, який потрапляє у внутрішність кола $|z| = 2$, і нуль у точці $z = -5$, яка не належить кругу $|z| < 2$. Отже, відповідно до теореми Руше у внутрішності кола $|z| = 2$ у багаточлена $z^6 + 5z^5 - z^2 + 2$ буде $N_2 = 5$ нулів і, оскільки у внутрішності кола $|z| = 1$ теж розташовано $N_1 = 5$ нулів, у кільці $1 < |z| < 2$ даний багаточлен нулів не має ($N = N_2 - N_1 = 0$).

Приклад 5.16

Знайти кількість коренів рівняння $e^z - 4z^n + 1 = 0$ в області $|z| < 1$.

Розв'язання. Покладемо $f(z) = -4z^n$, $\varphi(z) = e^z + 1$. На колі $|z| = 1$ маємо

$$|f(z)| = 4|z|^n = 4, \quad |\varphi(z)| = |e^z + 1| \leq |e^z| + 1 = |e^{x+iy}| + 1 = e^x + 1 < e + 1 < 4,$$

тобто $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

Відповідно до теореми Руше, у внутрішності круга $|z| < 1$ буде розташовано n коренів рівняння $e^z - 4z^n + 1 = 0$.

Завдання: знайти кількість коренів рівняння в заданій області.

$$5.6.21. \quad z^2 - \cos z = 0, \quad |z| < 2. \quad 5.6.31. \quad 4z^4 - 29z^2 + 25 = 0, \quad |z| < 3.$$

$$5.6.22. \quad z^4 - \sin z = 0, \quad |z| < \pi. \quad 5.6.32. \quad z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0, \quad |z| < 2.$$

$$5.6.23. \quad z^2 + \operatorname{ch} iz = 0, \quad |z| < 1/2. \quad 5.6.33. \quad z^6 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$$

$$5.6.24. \quad \operatorname{ch} z = z^2 - 4z, \quad |z| < 1. \quad 5.6.34. \quad z^6 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$5.6.25. \quad 2^z = 4z, \quad |z| < 1. \quad 5.6.35. \quad z^3 - 12z + 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$5.6.26. \quad e^z + 6z^2 = 0, \quad |z| < 1/2. \quad 5.6.36. \quad z^8 + 6z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$5.6.27. \quad z^3 - \cos z = 0, \quad |z| < \pi. \quad 5.6.37. \quad z^5 - 3z^2 + 5 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$5.6.28. \quad e^z + 5z^2 - z = 0, \quad |z| < 1. \quad 5.6.38. \quad z^5 - z^2 + 1 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$5.6.29. \quad e^z + 4z^3 - 2 = 0, \quad |z| < 1. \quad 5.6.39. \quad z^5 - z^3 - z + 5 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$5.6.30. \quad \sin z + z^2 + 1 = 0, \quad |z| < 1. \quad 5.6.40. \quad z^5 - z^3 - z + 5 = 0, \quad 2 < |z| < 3.$$

6. Обчислення означених інтегралів за допомогою лишків

6.1. Обчислення означених інтегралів типу $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$

Розглянемо інтеграл виду $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$, де R — раціональна функція від $\cos \varphi$ і $\sin \varphi$, неперервна всередині проміжку інтегрування. Такі інтеграли, звівши їх до контурного інтегрування, можна обчислити за допомогою теорії лишків. З цією метою введемо заміну $z = e^{i\varphi}$, тоді

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

і точка z при зміні φ від 0 до 2π рухається вздовж замкненого кола $|z| = 1$. Тобто

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \oint_{|z|=1} F(z) dz.$$

Інтеграл у правій частині рівності обчислюється за основною теоремою Коші, де сума лишків функції $F(z)$ береться тільки по тим особливим точкам, що належать області $|z| < 1$.

Приклад 6.1

Обчислити інтеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}$ ($a > b > 0$).

Розв'язання. Застосовуючи заміну $e^{i\varphi} = z$, після перетворень маємо

$$I = \frac{1}{iz} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left(a + b \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = \frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z).$$

У внутрішності кола одиничного радіуса, за умови $a > b > 0$, знаходиться тільки один двократний полюс $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$.

Лишок функції $F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$ у цій точці дорівнює

$$\operatorname{res} F(z) \Big|_{z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z(z - z_1)^2}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right\} = \frac{ab}{4} (a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

Отже,

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Завдання: обчислити інтеграл.

$$6.1.1. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \sqrt{3} \sin \varphi}.$$

$$6.1.2. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 + \sqrt{15} \sin \varphi}.$$

$$6.1.3. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 2\sqrt{6} \sin \varphi}.$$

$$6.1.4. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{6 + \sqrt{35} \sin \varphi}.$$

$$6.1.5. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{7 + 4\sqrt{3} \sin \varphi}.$$

$$6.1.6. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \sin \varphi}.$$

$$6.1.7. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 3 \sin \varphi}.$$

$$6.1.8. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{8 - 3\sqrt{7} \sin \varphi}.$$

$$6.1.9. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{9 - 4\sqrt{5} \sin \varphi}.$$

$$6.1.10. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 - \sqrt{7} \sin \varphi}.$$

$$6.1.11. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 - \sqrt{5} \sin \varphi}.$$

$$6.1.12. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 - 2\sqrt{2} \sin \varphi}.$$

$$6.1.13. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 - 2\sqrt{3} \sin \varphi}.$$

$$6.1.14. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - \sqrt{21} \sin \varphi}.$$

$$6.1.15. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{6 - 4\sqrt{2} \sin \varphi}.$$

$$6.1.16. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{8 - 2\sqrt{15} \sin \varphi}.$$

$$6.1.17. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{3} \sin \varphi - 2}.$$

$$6.1.18. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{15} \sin \varphi - 4}.$$

$$6.1.19. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\sqrt{6} \sin \varphi - 5}.$$

$$6.1.20. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{35} \sin \varphi - 6}.$$

$$6.1.21. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \sqrt{10/11} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.22. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{5} + \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.23. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \sqrt{6/7} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.24. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2\sqrt{3} + \sqrt{11} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.25. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.26. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(4 + \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.27. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(4 + 3 \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.28. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{5} + \sqrt{3} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.29. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{7} + 2 \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.30. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(4 + \sqrt{7} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.31. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3 + \sqrt{5} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.32. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.33. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.34. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{6} + \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.35. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.36. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.37. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{2} + \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.38. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{5} + 2 \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.39. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3 + \cos \varphi)^2}.$$

$$6.1.40. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} \cos \varphi)^2}.$$

6.2. Обчислення невластних інтегралів

Теорія лишків може бути застосована і для обчислення інтегралів дійсної функції по скінченному $(a; b)$ або нескінченному $(-\infty; \infty)$ відрізку осі X . Основна ідея методу полягає в доповненні відрізку $(a; b)$ деякою кривою C для одержання замкненого контуру в комплексній площині. Після аналітичного продовження функції $f(x)$ у комплексну площину $f(x) \rightarrow f(z)$ і застосування теореми про лишки маємо

$$\int_a^b f(x)dx + \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{res}_{z_i} f(z),$$

де контур C у більшості випадків (для спрощення інтегрування) обирають у вигляді півкола (або кола).

Якщо інтервал $(a; b)$ нескінченний, то безпосереднє інтегрування (внаслідок необмеженості шляху) стає неможливим. Тоді розглядають внески інтегра-

лів за контуром $\gamma: \{[-R, R], C_R\}$ при прагненні $R \rightarrow \infty$. При цьому зазвичай внесок контуру C_R явно не обчислюють, а доводять, що він дорівнює нулю.

При обчисленні інтегралів на проміжку $[0; \infty)$, якщо підінтегральна функція парна, переходять до інтеграла на проміжку $(-\infty; \infty)$:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Випадок непарних функцій буде розглянутий при інтегруванні багатозначних функцій.

Підкреслимо, що при обчисленні невластних інтегралів кожного типу не обов'язково запам'ятовувати загальні формули. Важливіше засвоїти методи, за якими вони одержуються.

6.3. Обчислення невластних інтегралів типу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Метод застосовується до обчислення збіжних інтегралів типу $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$,

де $R(x)$ — раціональна функція, яка є відношенням двох багаточленів $R(x) = P_k(x)/Q_l(x)$, причому степінь багаточлена знаменника принаймні на дві одиниці більший, ніж у чисельника: $l - k \geq 2$.

Контур інтегрування γ оберемо у вигляді відрізка $[-R, R]$ і півкола $C_R = \{|z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$ (рис. 5). Після аналітичного продовження функції $R(x)$ у комплексну площину $R(x) \rightarrow R(z)$, розглянемо інтеграл

$$\oint_{\gamma} R(z)dz = \int_{-R}^R R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz.$$

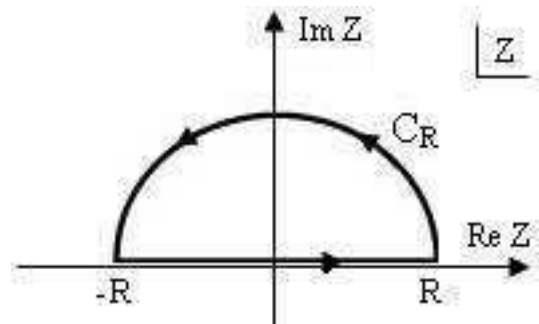


Рис. 5

За умови $l - k \geq 2$ на півколі C_R маємо $|R(z)| \leq MR^{-2}$, тобто внесок інтеграла вздовж контуру C_R при $R \rightarrow \infty$ буде $MR^{-2}\pi R \rightarrow 0$. Остаточно, після переходу до границі $R \rightarrow \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_i \text{res} R(z) \Big|_{z=z_i},$$

де сума лишків береться по всіх полюсах функції $R(z)$, розташованих у верхній півплощині.

При замиканні контуру в нижній півплощині внаслідок його протилежного обходу отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum_i \operatorname{res} R(z) \Big|_{z=z_i}.$$

Приклад 6.2

Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$ ($a > 0$).

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}$ парна, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Розглянемо функцію $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$, яка на дійсній осі, тобто при $z = x$, збігається з $f(x)$. Замкнемо контур у верхній півплощині півколом C_R , як показано на рис. 5. Оскільки $f(z) \sim 1/z^2$, внесок півкола прагне до нуля при $R \rightarrow \infty$. Тобто інтегрування вздовж дійсної осі зводиться до інтегрування за контуром $\gamma : \{[-R, R], C_R\}$. Функція $f(z)$ має у верхній півплощині полюс другого порядку в точці $z = ai$, лишок в якому дорівнює

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{ai} = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [f(z)(z - ai)^2] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z + ai)^2} \right] = \frac{1}{4ai}.$$

Звідси при $R \rightarrow \infty$ за основною теоремою про лишки

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

Приклад 6.3

Обчислити інтеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - i/2)^4}$.

Розв'язання. Особливими точками підінтегральної функції $f(z)$ будуть прості полюси $z = \pm i$ та $z = i/2$ — полюс кратності $n = 4$. У даному випадку,

щоб не обчислювати лишок у полюсі четвертого порядку, замкнемо контур у нижній півплощині.

Лишок $f(z)$ у полюсі $z = -i$ дорівнює

$$\operatorname{res} \frac{1}{(z - i/2)^4(z^2 + 1)} \Big|_{z=-i} = \frac{1/(z - i/2)^4}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=-i} = \frac{2^4}{2 \cdot 3^4(-i)}.$$

При $z \rightarrow \infty$ внесок півкола прагне до нуля, оскільки $f(z) \sim 1/z^6$, і інтегрування за замкненим контуром знов зводиться до інтегрування вздовж дійсної осі. Але додатний напрямок обходу контуру зараз вже буде від точки R до точки $-R$, що потребує зміни знака. Отже, при $R \rightarrow \infty$ маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - i/2)^4} = -2\pi i \operatorname{res} \frac{1}{(z - i/2)^4(z^2 + 1)} \Big|_{z=-i} = \pi \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

Завдання: обчислити інтеграл.

$$6.3.1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

$$6.3.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}.$$

$$6.3.3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$6.3.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

$$6.3.5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.$$

$$6.3.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x + 2)dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$6.3.7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - 1)dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

$$6.3.8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^4)^2}.$$

$$6.3.9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 16)}.$$

$$6.3.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$6.3.11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)^2}.$$

$$6.3.12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$6.3.13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 9)}.$$

$$6.3.14. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 3)^3}.$$

$$6.3.15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2}.$$

$$6.3.16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)}.$$

$$6.3.17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$6.3.18. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$6.3.19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 5)^2}.$$

$$6.3.20. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

$$6.3.21. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 5)dx}{x^4 + 5x^2 + 6}.$$

$$6.3.22. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3)dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}.$$

$$6.3.23. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 5)^2}.$$

$$6.3.24. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}.$$

$$6.3.25. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 4)dx}{(x^2 + 9)^2}.$$

$$6.3.26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^5}.$$

$$6.3.27. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2(x^2 + 10)^2}.$$

$$6.3.28. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 8x + 17)^2}.$$

$$6.3.29. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 10)dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

$$6.3.30. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2(x^2 + 15)^2}.$$

$$6.3.31. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 2)dx}{x^4 + 7x^2 + 12}.$$

$$6.3.32. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}.$$

$$6.3.33. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 11)^2}.$$

$$6.3.34. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 16)}.$$

$$6.3.35. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

$$6.3.36. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

$$6.3.37. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^4 + 1)dx}{x^6 + 1}.$$

$$6.3.38. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$6.3.39. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0.$$

$$6.3.40. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{x^4 + 1}.$$

6.4. Застосування леми Жордана до інтегралів типу $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$

Розглянемо обчислення інтегралів типу $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$, які є перетворенням Фур'є раціональних функцій $R(x)$, що не мають полюсів на осі x .

Для застосування теорії лишків замкнемо контур інтегрування. Враховуючи те, що після аналітичного продовження підінтегрального виразу в комплексну площину матимемо $e^{i\alpha x} \rightarrow e^{i\alpha z} = e^{i\alpha x} e^{-\alpha y}$, для збіжності інтеграла при $\alpha > 0$ необхідно контур замкнути у верхній півплощині, де $y > 0$. Таким чином, контур інтегрування γ буде складатися з відрізка $[-R, R]$ і півкола $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, як показано на рис. 5.

Далі для оцінки внеску контуру C_R застосуємо лему Жордана: якщо функція $g(z)$ неперервна в області $\operatorname{Im} z \geq 0$, $|z| \geq R_0 > 0$ і така, що на контурі C_R , яким є півколо $\{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $M(R) = \max_{z \in C_R} |g(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0, \quad \alpha > 0.$$

Отже, якщо у функції $R(x)$ немає полюсів на дійсній осі та $R(x) \sim \frac{c}{x^k}$, $k \geq 1$ при $x \rightarrow \infty$, то після застосування леми Жордана

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = 2\pi i \sum_i \operatorname{res} (e^{i\alpha z} R(z)) \Big|_{z=z_i}, \quad \alpha > 0,$$

де лишки беруться тільки в особливих точках верхньої півплощини.

Після відокремлення дійсної та уявної частин цю формулу також можна переписати як

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \sum_m \operatorname{res} (R(z) e^{i\alpha z}) \Big|_{z_m} \right\}, \quad \alpha > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_m \operatorname{res} (R(z) e^{i\alpha z}) \Big|_{z_m} \right\}, \quad \alpha > 0.$$

Зауваження: при $\alpha < 0$ для збіжності інтеграла контур інтегрування слід

замикати вже в нижній півплощині, що дає

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = -2\pi i \sum_i \operatorname{res} (e^{i\alpha z} R(z)) \Big|_{z=z_i}, \quad \alpha < 0.$$

Приклад 6.4

Обчислити інтеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$.

Розв'язання. Розглянемо інтеграл $\int_{\gamma} \frac{ze^{iz}}{z^4 + 1} dz$, де контур γ складається з відрізка $[-R, R]$ та півкола $C_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Підінтегральна функція має чотири полюси, з яких у внутрішність контуру γ потрапляють тільки $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Знайдемо лишки:

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{ze^{iz}}{z^4 + 1} (z - z_0) = z_0 e^{iz_0} \frac{1}{4z_0^3} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4i} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} + i \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\operatorname{res} f(z) \Big|_{z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{ze^{iz}}{z^4 + 1} (z - z_1) = z_1 e^{iz_1} \frac{1}{4z_1^3} = \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{-4i} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} - i \sin \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Отже, за теоремою про лишки, після переходу до границі $R \rightarrow \infty$ і врахування леми Жордана, матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(z) \Big|_{z_0} + \operatorname{res} f(z) \Big|_{z_1} \right) = \frac{\pi}{2} e^{(-\frac{\sqrt{2}}{2})} 2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi e^{(-\frac{1}{\sqrt{2}})} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Завдання: обчислити інтеграл.

$$6.4.1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$6.4.2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

$$6.4.3. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 9}.$$

$$6.4.4. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - 1) \sin x dx}{(x^2 + 9)^2}.$$

$$6.4.5. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$6.4.6. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$6.4.7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos x dx}{x^4 + 5x^2 + 6}.$$

$$6.4.8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x/2) dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

$$6.4.9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) \cos 2x dx}{x^4 + 3x^2 + 2}.$$

$$6.4.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos(x/2) dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$6.4.11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x) \sin x dx}{x^4 + 9x^2 + 20}.$$

$$6.4.12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 17}.$$

$$6.4.13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x \sin 2x - \sin x) dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

$$6.4.14. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

$$6.4.15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

$$6.4.16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$6.4.17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$6.4.18. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$6.4.19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$6.4.20. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

6.5. Невласні інтеграли від багатозначних функцій

Інтеграли типу $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} R(x) dx$

Дані інтеграли — перетворення Мелліна, де α — не ціле, $R(x)$ — раціональна функція. Інтеграл буде збіжним, якщо $R(x)$ не має полюсів на інтервалі $(0; \infty)$ і виконуються умови:

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z|^{\alpha} R(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{\alpha} R(z) = 0.$$

Перша умова має місце, коли $\alpha > 0$, а друга — якщо $R(z) \sim \frac{c}{z^k}$ при $z \rightarrow \infty$ і $k - \alpha > 0$.

У зв'язку з тим, що α — не ціле, підінтегральна функція багатозначна. Для виділення її регулярної гілки зробимо розріз у комплексній площині вздовж дійсної осі від 0 до ∞ і розглянемо контур γ , який складається з верхнього і нижнього берегів розрізу і контурів C_R і C_r (рис. 6).

При введених обмеженнях на поведінку $R(z)$ внески інтегралів за контурами C_r і C_R будуть прямувати до нуля при $r \rightarrow 0$ і $R \rightarrow \infty$ відповідно. Тому

залишається інтегрування тільки вздовж берегів розрізу

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left(\int_r^R x^{\alpha-1} R(x) dx - \int_r^R x^{\alpha-1} R(x) dx \right) = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}(z^{\alpha-1} R(z)) \Big|_{z=z_k},$$

де сума лишків береться по полюсах, які входять у внутрішність контуру γ .

Нагадаємо, що функція $R(z)$ — однозначна, а багатозначність виникає тільки від $z^{\alpha-1}$ при α не цілому.

У внутрішності контуру γ маємо $z = |z|e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Якщо на верхньому березі розрізу $\varphi = 0$ і $z^{\alpha-1} = |z|^{\alpha-1}$, то для переходу на нижній берег розрізу треба обійти початок на кут 2π . Тобто на нижньому березі розрізу корінь набуде значення

$$z^{\alpha-1} = |z|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)2\pi} = |z|^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha}.$$

Отже, інтеграли по верхньому і нижньому берегах розрізу відрізняються тільки сталим множником $e^{i2\pi\alpha}$, що дає змогу записати

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_k \operatorname{res}(z^{\alpha-1} R(z)) \Big|_{z=z_k}.$$

Зауваження: при обчисленні лишків необхідно пам'ятати, що комплексна площина розрізана, тому аргументи комплексних чисел знаходяться в межах $0 \leq \varphi < 2\pi$. Тобто для аргументу числа $z = -i$ не можна брати значення $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ — слід брати $\arg z = \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 6.5

Обчислити інтеграл $I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x}$, $0 < \alpha < 1$.

Розв'язання. Здійснимо аналітичне продовження в комплексну площину і розглянемо функцію $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$. При інтегруванні цієї функції вздовж контуру γ внески інтегралів за контурами C_r і C_R прямують до нуля при $r \rightarrow 0$ і $R \rightarrow \infty$, тому залишається інтегрування тільки вздовж верхнього і нижнього берегів розрізу.

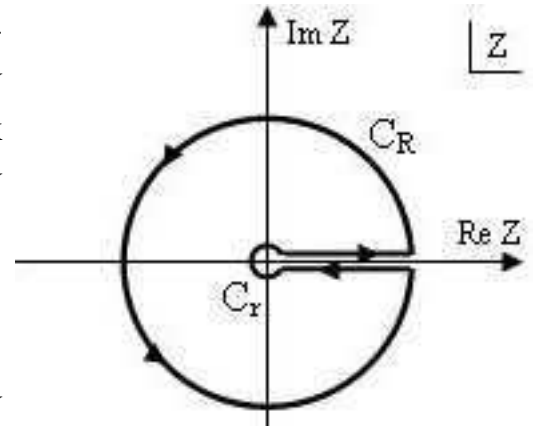


Рис. 6

Функція $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ має у внутрішності контуру γ тільки один простий полюс у точці $z = -1$, лишок у якій дорівнює

$$\operatorname{res} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \Big|_{z=-1} = (-1)^{\alpha-1} = -e^{i\pi\alpha}.$$

Оскільки на нижньому березі розрізу $f(xe^{2\pi i}) = e^{i2\pi\alpha} f(x)$, маємо

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x} = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \operatorname{res} \left(\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \right) \Big|_{z=-1} = \frac{2\pi i e^{i\pi\alpha}}{e^{i2\pi\alpha} - 1} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Завдання: обчислити інтеграл.

$$6.5.1. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}.$$

$$6.5.2. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)(x^2+1)}.$$

$$6.5.3. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)}.$$

$$6.5.4. \int_0^\infty \frac{dx \sqrt{x}}{1+x^2}.$$

$$6.5.5. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(2+x)}.$$

$$6.5.6. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)(x+2)}.$$

$$6.5.7. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

$$6.5.8. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(5+x^2)}.$$

$$6.5.9. \int_0^\infty \frac{dx \sqrt{x}}{(2+x^2)}.$$

$$6.5.10. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+9)}.$$

Інтеграли типу $I = \int_0^\infty \ln x R(x) dx$

Дані інтеграли будуть збіжними, якщо $R(x)$ не має полюсів на дійсній осі і виконуються умови

$$\lim_{x \rightarrow 0} R(x) = \text{const}, \quad R(x) \sim \frac{c}{x^k}, \quad k \geq 2 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Оскільки $\operatorname{Ln} z$ — багатозначна функція, для виділення її регулярну гілки $\operatorname{Ln} z$ зробимо розріз вздовж дійсної осі від 0 до ∞ . Контур інтегрування γ оберемо, як і в попередньому випадку (див. рис. 6).

При введених обмеженнях на поведінку функції $R(z)$ внески інтегралів уздовж контурів C_r і C_R будуть прагнути до нуля при $r \rightarrow 0$ і $R \rightarrow \infty$ відповідно.

Отже, інтегрування буде проводитися тільки по верхньому і нижньому берегах розрізу. Але функція $\text{Ln } z$ має адитивну багатозначність — $\ln z = \ln |z| + i \arg z$. Унаслідок цього функція $\ln |z| \cdot R(z)$ стає вже однозначною і інтеграли з логарифмами зникають, оскільки мають протилежні знаки. Тому, щоб одержати шуканий інтеграл, оберемо допоміжну функцію $\ln^2 z R(z)$ і розглянемо $\oint_{\gamma} R(z) \ln^2 z dz$, який дорівнює

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} R(z) \ln^2 z dz &= \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left(\int_{r+i0}^{R+i0} R(z) \ln^2 z dz - \int_{r-i0}^{R-i0} R(z) \ln^2 z dz \right) = \\ &= 2\pi i \sum_m \text{res}(R(z) \ln^2 z) \Big|_{z=z_m}. \end{aligned}$$

На верхньому березі розрізу, оскільки $\arg z = 0$, матимемо $\int_0^{\infty} R(x) \ln^2 x dx$, у той час як при переході на нижній берег розрізу, унаслідок обходу початку, $\arg z$ одержить приріст 2π й інтеграл набуде вигляду $\int_0^{\infty} R(x) (\ln x + 2\pi i)^2 dx$.

У результаті, переходячи до границь $r \rightarrow 0$ і $R \rightarrow \infty$, матимемо

$$-4\pi i \int_0^{\infty} R(x) \ln x dx + 4\pi^2 \int_0^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_m \text{res}(R(z) \ln^2 z) \Big|_{z=z_m}.$$

Відокремлюючи дійсні та уявні частини, прийдемо до формул

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} R(x) \ln x dx &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_m \text{res}(R(z) \ln^2 z) \Big|_{z=z_m} \right), \\ \int_0^{\infty} R(x) dx &= -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \left(\sum_m \text{res}(R(z) \ln^2 z) \Big|_{z=z_m} \right). \end{aligned}$$

Останній вираз можна застосовувати для обчислення інтегралів від 0 до ∞ від непарних раціональних функцій. Однак, розглядаючи інтеграл $\oint_{\gamma} R(z) \ln z dz$

за тим же контуром (див. рис. 6), можна одержати більш просту формулу

$$\int_0^{\infty} R(x) dx = \sum_m \operatorname{res}(R(z) \ln z) \Big|_{z=z_m}.$$

Зауваження: при інтегруванні функцій із логарифмами, так само як і з коренями, слід пам'ятати, що комплексна площина розрізана, тому аргументи комплексних чисел знаходяться в межах $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Завдання: обчислити інтеграл.

$$6.5.11. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$6.5.12. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \ln x}{x^2+1} dx.$$

$$6.5.13. \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{x^2+2} dx.$$

$$6.5.14. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+3} dx.$$

$$6.5.15. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$6.5.16. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+2x+2} dx.$$

$$6.5.17. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{5+x} dx.$$

$$6.5.18. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+9} dx.$$

$$6.5.19. \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{3+x^2} dx.$$

$$6.5.20. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+16} dx.$$

$$6.5.21. \int_0^{\infty} \frac{x \cos 2x dx}{(x^2+4)^2}.$$

$$6.5.22. \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{(x^2+\frac{1}{4})^2}.$$

$$6.5.23. \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+1)^3}.$$

$$6.5.24. \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+16)(x^2+9)}.$$

$$6.5.25. \int_0^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2+4}.$$

$$6.5.26. \int_0^{\infty} \frac{x \cos x dx}{(x^2+1)(x^2+3)}.$$

$$6.5.27. \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)^2(x^2+1)}.$$

$$6.5.28. \int_0^{\infty} \frac{e^{x^2} \sin 2x dx}{(x^2+2)^3}.$$

$$6.5.29. \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+5)(x^2+7)}.$$

$$6.5.30. \int_0^{\infty} \frac{e^{x^2} x \cos x dx}{x^2+3}.$$

6.6. Головне значення інтеграла за Коші

Нехай функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$, за винятком полюса в точці $x_0 \in (a; b)$. Тоді інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде, зрозуміло, розбіжним, але йому можна надати певного змісту. Так, якщо існує інтеграл, узятий на проміжку $[a; b]$ з виколотою точкою x_0 , то його називають **головним значенням за Коші**.

Отже, головним значенням інтеграла за Коші є скінченна границя, якщо вона існує,

$$P.V. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx - \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \right],$$

де для головного значення застосовують позначення $P.V.$ — від англ. «principal value», або $V.P.$ — від фр. «valeur principale», або ж просто P .

При узагальненні на випадок інтегрування функцій комплексної змінної $f(z)$ із полюсом у точці z_0 на шляху інтегрування γ цю точку треба обійти за півколом C_ε малого радіуса ε за умови $\varepsilon \rightarrow 0$. Тоді для головного значення інтеграла знов-таки матимемо інтегрування вздовж кривої γ з виколотою точкою z_0 :

$$P.V. \int_\gamma f(z)dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\gamma f(z)dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz \right].$$

Обчислення інтеграла вздовж контуру γ , як правило, проводять за теоремою про лишки при замиканні контуру інтегрування в комплексній площині. Вибір обходу точки z_0 зліва чи справа відносно контуру γ обумовлюється або поставленням задачі, або прагненням спростити обчислення лишків.

Приклад 6.6

Довести **формули Сохоцького**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x - x_0 \pm i\varepsilon} = \mp i\pi\varphi(x_0) + P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0}dx,$$

які є дуже корисними при обчисленні головних значень інтегралів.

Розв'язання. Для комплексної функції $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - x_0}$, що має полюс на дійсній осі в точці x_0 , розглянемо інтеграл вздовж спрямованого контуру

$\gamma = \{[-R, x_0 - \varepsilon], C_\varepsilon, [x_0 + \varepsilon, R]\}$ (рис. 7). Вважатимемо, що головне значення інтеграла існує, тоді за означенням

$$P.V. \int_{-R}^R \frac{\varphi(z)}{z - x_0} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - x_0} dz - \int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(z)}{z - x_0} dz \right).$$

В останньому інтегралі інтегрування здійснюється вздовж півкола нескінченно малого радіуса ε у від'ємному напрямку.

Пам'ятаючи, що внесок від кола для простого полюса дорівнює $2\pi i \operatorname{res} f(z) \Big|_{z=x_0}$, для півкола, з урахуванням від'ємного напрямку обходу, знайдемо

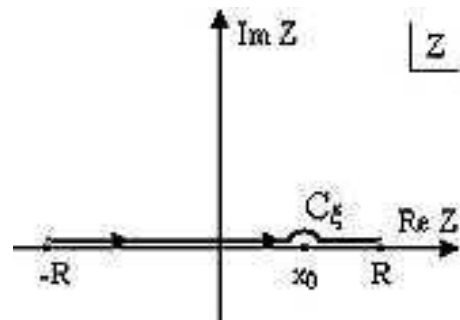


Рис. 7

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\varphi(z)}{z - x_0} dz = -\frac{1}{2} \left(2\pi i \operatorname{res} \frac{\varphi(z)}{z - x_0} \Big|_{z=x_0} \right) = -\pi i \varphi(x_0).$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - x_0} dz = -\pi i \varphi(x_0) + P.V. \int_{-R}^R \frac{\varphi(z)}{z - x_0} dz.$$

Але обраний шлях обходу точки x_0 еквівалентний інтегруванню по змінній $z = x + i\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому, остаточно, після переходу від скінченного інтервалу $[-R; R]$ до нескінченного $(-\infty; \infty)$ отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0 + i\varepsilon} dx = -\pi i \varphi(x_0) + P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx.$$

Якщо обхід точки x_0 здійснювати в нижній півплощині, то півколо обходиться вже в додатному напрямку і знак внеску інтеграла за контуром C_ε зміниться на протилежний.

Зауважимо, що для обчислення інтеграла $\int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - x_0}$ за контуром γ застосовують, як правило, методи, розглянуті в попередніх розділах.

Приклад 6.7

Обчислити інтеграл $P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 - 9)}$.

Розв'язання. Зробимо аналітичне продовження підінтегральної функції у комплексну площину $f(x) \rightarrow f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 - 9)}$. Функція $f(z)$ має прості полюси в точках $z = \pm 2i$, $z = \pm 3$. Полюси на дійсній осі в точках $x = -3$ і $x = 3$ обійдемо у верхній півплощині за півколами малого радіуса C_{r_1} і C_{r_2} , як показано на рис. 8.

Для застосування теорії лишків для обчислення інтеграла вздовж дійсної осі замкнемо контур у верхній півплощині півколом $C_R : \{|z| = R, \text{Im } z > 0\}$.

У внутрішність побудованого контуру Γ потрапляє тільки точка $z = 2i$, і за теоремою Коші про лишки маємо

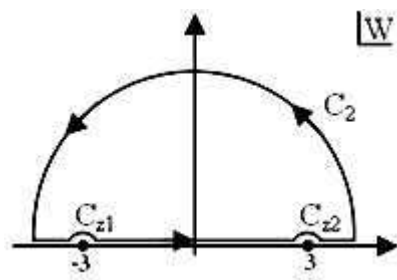


Рис. 8

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 4)(z^2 - 9)} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 - 9)} = \frac{2\pi i}{4i(-13)} = -\frac{\pi}{26}.$$

Одержане значення враховує внески інтегралів

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_R} + \int_{C_{r_1}} + \int_{C_{r_2}} + P.V. \int_{-R}^R f(z) dz = -\frac{\pi}{26}.$$

Оскільки при $R \rightarrow \infty$ функція $f(z) \sim 1/z^4 \rightarrow 0$, $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$.

Обчислимо внески інтегралів за контурами $C_{r_1} : \{|z + 3| = \varepsilon, \text{Im } z > 0\}$ і $C_{r_2} : \{|z - 3| = \varepsilon, \text{Im } z > 0\}$, які обходяться у від'ємному напрямку,

$$\begin{aligned} \int_{C_{r_1}} \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 - 9)} dz + \int_{C_{r_2}} \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 - 9)} dz &= -\pi i \operatorname{res}_{z=-3} \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 - 9)} - \\ &- \pi i \operatorname{res}_{z=3} \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 - 9)} = -\pi i \left(\left. \frac{1}{(z^2 + 4)2z} \right|_{z=-3} + \left. \frac{1}{(z^2 + 4)2z} \right|_{z=3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, при $R \rightarrow \infty$ знайдемо $P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 - 9)} = -\frac{\pi}{26}$.

Зауважимо, що замість обчислення інтегралів за контурами C_{r_1} і C_{r_2} можна було б відразу застосувати формулу Сохоцького.

Висновок (довести самостійно): якщо раціональна функція $R(z)$, така що $zR(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, регулярна в області $\text{Im } z > 0$ (за винятком скінченного числа особливих точок $a_1, a_2, \dots, a_n$) і має прості полюси на дійсній осі в точках $b_1, b_2, \dots, b_m$, то

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res} R(z) \Big|_{z=a_i} + i\pi \sum_{j=1}^m \text{res} R(z) \Big|_{z=b_j}.$$

Приклад 6.8

Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx$.

Розв'язання. Хоча точка $x = 0$ усувна, але все ж таки вона є особливою точкою. Тому інтеграл слід розглядати у розумінні головного значення. Враховуючи парність підінтегральної функції, перейдемо до інтегрування на інтервалі $(-\infty; \infty)$ і для застосування леми Жордана запишемо інтеграл як

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz \right\}.$$

Замкнемо контур у верхній півплощині півколом C_R радіуса R , а на дійсній осі обійдемо точку $z = 0$ знизу за півколом C_r . У внутрішності побудованого контуру $\gamma = \{[-R, -r], C_r, [r, R], C_R\}$ знаходиться тільки полюс другого порядку в точці $z = 0$. Отже,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{2z^2} dz &= \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz + P.V. \int_{-R}^R f(z) dz = \\ &= 2\pi i \text{res} \left(\frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{2z^2} \right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{(e^{i\alpha z} - e^{i\beta z})'}{2} = \pi(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Оскільки за лемою Жордана внесок півкола C_R прямує до нуля при $R \rightarrow \infty$, а внесок півкола C_r дорівнює

$$\int_{C_r} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{2z^2} dz = \pi i \text{res} \left(\frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{2z^2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha),$$

то

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{2z^2} dz + \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha) = \pi(\beta - \alpha).$$

Зважаючи на те, що для головного значення одержана суто дійсна величина, маємо

$$I = \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha).$$

Висновок (довести самостійно): якщо раціональна функція $R(z)$, така що $|R(z)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, регулярна в області $\text{Im } z > 0$ (за винятком скінченного числа особливих точок $a_1, a_2, \dots, a_n$) і має прості полюси на дійсній осі в точках $b_1, b_2, \dots, b_m$, то при $\alpha > 0$

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res} (e^{i\alpha z} R(z)) \Big|_{z=a_i} + i\pi \sum_{j=1}^m \text{res} (e^{i\alpha z} R(z)) \Big|_{z=b_j}.$$

Приклад 6.9

Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx$, ($0 < \alpha < 1$).

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}$ має полюс на дійсній осі в точці $x = 1$, тому слід обчислювати головне значення інтеграла.

Здійснимо аналітичне продовження $f(x) \rightarrow f(z)$ у комплексну площину із розрізом (у зв'язку з багатозначністю функції $z^{\alpha-1}$) і оберемо контур γ , як показано на рис. 9. Оскільки у внутрішності контуру γ функція регулярна, матимемо

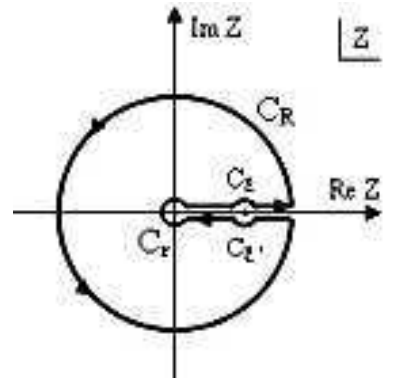


Рис. 9

$$(1 - e^{2\alpha\pi i}) \left\{ \int_r^{1-r} f(x) dx + \int_{1+r}^R f(x) dx \right\} + \int_{C_r} + \int_{C_\epsilon} + \int_{C_R} + \int_{C_{\epsilon'}} = 0,$$

де шукане головне значення інтеграла I взяте у фігурні дужки і врахована відмінність кореневої функції на верхньому і нижньому берегах розрізу.

Як вже було зазначено в попередніх розділах, внесок контурів C_r і C_R дорівнює нулю при $r \rightarrow 0$ і $R \rightarrow \infty$ відповідно, тому залишається обчислити тільки внески в інтеграл контурів C_ϵ і $C_{\epsilon'}$.

На верхньому березі розрізу для точок $z \in C_\varepsilon$ маємо $z = 1 + \varepsilon e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $dz = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$. Тоді $z^{\alpha-1} = (1 + \varepsilon e^{i\varphi})^{\alpha-1} = 1 + \delta(\varepsilon, \varphi)$, причому $\delta(\varepsilon, \varphi) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, і інтеграл вздовж C_ε дорівнює

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{1 + \delta(\varepsilon, \varphi)}{-\varepsilon e^{i\varphi}} \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = -i \int_{\pi}^0 [1 + \delta(\varepsilon, \varphi)] d\varphi \rightarrow \pi i \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

На нижньому березі розрізу для точок $z_{\text{н.б.}} = e^{i2\pi\alpha} z_{\text{в.б.}} = e^{i2\pi\alpha} (1 + \delta(\varepsilon, \varphi))$, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, тобто

$$\int_{C_{\varepsilon'}} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} dz = -ie^{i2\pi\alpha} \int_{2\pi}^{\pi} [1 + \delta(\varepsilon, \varphi)] d\varphi \rightarrow \pi i e^{i2\pi\alpha} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отже,

$$(1 - e^{2\alpha\pi i}) P.V. \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx + i\pi (1 + e^{2\alpha\pi i}) = 0.$$

Звідси

$$P.V. \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = \frac{-i\pi e^{i\pi\alpha} (e^{-i\pi\alpha} + e^{i\pi\alpha})}{e^{i\pi\alpha} (e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})} = \pi \operatorname{ctg} \pi\alpha.$$

Висновок (довести самостійно): якщо раціональна функція $R(z)$, така що $|z^\alpha| R(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ і $z \rightarrow \infty$, $0 < \alpha < 1$, регулярна в комплексній площині за винятком скінченного числа особливих точок $a_1, a_2, \dots, a_n$ і має прості полюси на дійсній осі в точках $b_1, b_2, \dots, b_m$, то

$$\begin{aligned} P.V. \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x) dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{i=1}^n \operatorname{res} (z^{\alpha-1} R(z)) \Big|_{z=a_i} - \\ &- \pi \operatorname{ctg} \pi\alpha \sum_{j=1}^m \operatorname{res} (z^{\alpha-1} R(z)) \Big|_{z=b_j}. \end{aligned}$$

Завдання: обчислити інтеграл.

$$6.6.1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 - 1} dx.$$

$$6.6.2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1} dx.$$

$$6.6.3. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 16)(x - 2)}.$$

$$6.6.4. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 5)(x - 5)}.$$

$$6.6.5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x - 3)}.$$

$$6.6.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x - 2)}.$$

$$6.6.7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - 5)}.$$

$$6.6.8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{-1/2}}{1 - x} dx.$$

$$6.6.9. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{-2/3}}{1 - x} dx.$$

$$6.6.10. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{-1/11}}{1 - x} dx.$$

$$6.6.11. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x - 4)(x - 9)} dx.$$

$$6.6.12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i\alpha x}}{x^2} dx, \alpha > 0.$$

$$6.6.13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i\alpha x}}{x^2} dx, \alpha < 0.$$

$$6.6.14. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx, \alpha > 0.$$

$$6.6.15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx, \alpha < 0.$$

$$6.6.16. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i\alpha x}}{x} dx.$$

$$6.6.17. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

$$6.6.18. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x} dx.$$

$$6.6.19. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{e^{2x} - 1} dx.$$

$$6.6.20. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{e^{3x} - 1} dx.$$

$$6.6.21. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x}} dx.$$

$$6.6.22. \int_0^{\infty} \frac{(x^2 - 1) \sin 2x}{(x^2 + 1)x} dx.$$

$$6.6.23. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

$$6.6.24. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - \cos 5x}{x^2} dx.$$

$$6.6.25. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$6.6.26. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1 + x^3} dx.$$

$$6.6.27. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{1 + x^3} dx.$$

$$6.6.28. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1 - x^4} dx.$$

$$6.6.29. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 9)x} dx.$$

$$6.6.30. \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2 + 3)} dx.$$

$$6.6.31. \int_0^{\infty} \frac{\sin 3x}{x(x^2 + 7)} dx.$$

$$6.6.32. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$6.6.33. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{1-x^3} dx.$$

$$6.6.34. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

$$6.6.35. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} dx.$$

$$6.6.36. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$6.6.37. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

$$6.6.38. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2 + 9)^2} dx.$$

$$6.6.39. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

$$6.6.40. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{1-x^3} dx.$$

6.7. Дисперсійні співвідношення

Нехай функція $f(z)$ регулярна у внутрішності замкненого контуру γ , який складається з відрізка $[-R, R]$ і півкола C_R ($|z| = R$, $\text{Im } z \geq 0$). Тоді за умови $\max_{z \in C_R} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ інтегральна формула Коші набуде вигляду

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad \text{Im } z > 0$$

і задасть значення функції в довільних точках верхньої півплощини через її значення на дійсній осі.

Розглянемо випадок, коли точка z знаходиться на дійсній осі. У такому разі контур інтегрування необхідно деформувати так, щоб він не проходив через полюс, який утворився у підінтегральній функції на дійсній осі. Для застосування інтегральної формули Коші необхідно, щоб точка $z = x$ входила до внутрішності контуру γ , тому її слід обійти знизу, що зручніше всього зробити по дузі півкола малого радіуса ε (рис. 10).

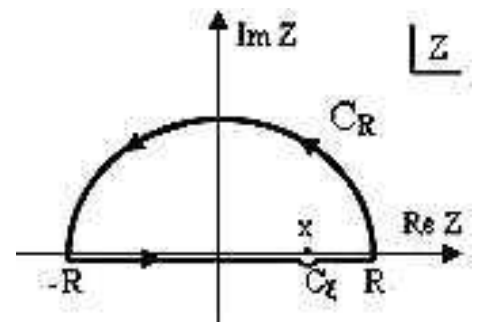


Рис. 10

Інтегрування за таким контуром еквівалентне переходу до границі

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - x - i\varepsilon} d\xi.$$

Врахувавши *формули Сохоцького*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x \mp i\varepsilon} d\xi = \pm i\pi \varphi(x) + P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

матимемо

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi.$$

Відокремлюючи дійсну та уявну частини, знайдемо

$$\operatorname{Re} f(x) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(\xi)}{\xi - x} d\xi.$$

Такий інтегральний зв'язок між дійсною та уявною частинами регулярної функції має назву **дисперсійних співвідношень**, або **перетворень Гільберта**. Ці формули відомі ще й під назвою формул **Сохоцького–Племеля**.

Зауважимо, що дисперсійні співвідношення можна також записати і для функцій, які втрачають свою регулярність у скінченному числі точок верхньої півплощини. Для цього слід застосувати узагальнення теореми Коші на випадок багатозв'язних областей.

Приклад 6.10

Відновити функцію $f(x)$, якщо $\operatorname{Im} f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Розв'язання. Розглянемо інтегральне перетворення Гільберта

$$\operatorname{Re} f(x) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\xi)}{\xi - x} d\xi = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\pi(1+\xi^2)(\xi - x)} d\xi,$$

для обчислення якого оберемо на комплексній площині контур γ , складений із півкола C_R великого радіуса у верхній півплощині ($|\xi| = R$, $\operatorname{Im} \xi \geq 0$), відрізків $[-R, x-\varepsilon]$, $[x+\varepsilon, R]$ і півкола C_ε малого радіуса в нижній півплощині ($|\xi - x| = \varepsilon$, $\operatorname{Im} \xi \leq 0$) (рис. 10).

Підінтегральна функція $\varphi(\xi) = \frac{-1}{(1+\xi^2)(\xi - x)}$ має прості полюси в точках $\xi = \pm i$, $\xi = x$, але у внутрішність контуру γ потрапляють тільки точки $\xi = i$ та $\xi = x$. Тому

$$\oint_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi = 2\pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=i} + 2\pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=x}.$$

Оскільки внесок інтеграла за контуром C_R прямує до нуля при $R \rightarrow \infty$, а інтегрування за C_ε навколо простого полюса зводиться до знаходження половини лишку в точці $\xi = x$, для головного значення інтеграла маємо

$$\begin{aligned} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi &= \oint_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi - \int_{C_\varepsilon} \varphi(\xi) d\xi = 2\pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=i} + \pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=x} = \\ &= -\frac{2\pi i}{\pi} \frac{1}{(i+i)(i-x)} - \frac{\pi i}{\pi(1+x^2)} = \frac{x}{x^2+1} = \operatorname{Re} f(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{i}{x^2+1} = \frac{1}{x+i}.$$

Приклад 6.11

Відновити функцію $f(x)$, якщо $\operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^2}$.

Розв'язання. Розглянемо інтегральне перетворення Гільберта

$$\operatorname{Im} f(x) = -\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(\xi)}{\xi - x} d\xi = -P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 - a^2}{\pi(\xi^2 + a^2)^2(\xi - x)} d\xi,$$

для обчислення якого оберемо на комплексній площині контур γ , складений із півкола C_R великого радіуса у верхній півплощині ($|\xi| = R$, $\operatorname{Im} \xi \geq 0$), відрізків $[-R, x-\varepsilon]$, $[x+\varepsilon, R]$ і півкола C_ε малого радіуса в нижній півплощині ($|\xi - x| = \varepsilon$, $\operatorname{Im} \xi \leq 0$) (див. рис. 10).

Підінтегральна функція $\varphi(x) = -\frac{\xi^2 - a^2}{\pi(\xi^2 + a^2)^2(\xi - x)}$ має простий полюс у точці $\xi = x$ і двократні полюси в точках $\xi = \pm ia$. Але у внутрішність контуру інтегрування γ потрапляють тільки полюси $\xi = ia$ і $\xi = x$.

Таким чином, інтеграл за замкненим контуром γ дорівнює

$$\int_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi = 2\pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=ai} + 2\pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=x}.$$

Оскільки $\varphi(\xi) \sim \frac{1}{R^3}$ при $R \rightarrow \infty$, то внесок інтеграла за контуром C_R прямує до нуля. Враховуючи те, що півколо C_ε обходить простий полюс у додатному напрямку, внесок інтеграла за контуром C_ε зводиться до знаходження половини лишку в точці $\xi = x$; для головного значення інтеграла маємо

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = \oint_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi - \int_{C_\varepsilon} \varphi(\xi) d\xi = 2\pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=ai} + \pi i \operatorname{res} \varphi(\xi)|_{\xi=x}.$$

Обчислимо лишок у двократному полюсі $\xi = ai$

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \frac{\xi^2 - a^2}{\pi(\xi^2 + a^2)^2(\xi - x)} \Big|_{\xi=ia} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\xi^2 - a^2}{(\xi + ia)^2(\xi - x)} \right)' \Big|_{\xi=ia} = \\ &= \frac{2ia(\xi - x)(\xi - ia) - (\xi^2 - a^2)(\xi + ia)}{\pi(\xi + ia)^3(\xi - x)^2} \Big|_{\xi=ia} = \\ &= \frac{-(-2a^2)(2ia)}{\pi(2ia)^3(ia - x)^2} = -\frac{1}{2\pi(ia - x)^2} \end{aligned}$$

і у простому полюсі $\xi = x$

$$\operatorname{res} \frac{\xi^2 - a^2}{\pi(\xi^2 + a^2)^2(\xi - x)} \Big|_{\xi=x} = \frac{x^2 - a^2}{\pi(x^2 - a^2)^2}.$$

Підставляючи отримані значення лишків у формулу для головного значення інтеграла, маємо

$$\begin{aligned} -P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 - a^2}{\pi(\xi^2 + a^2)^2(\xi - x)} d\xi &= \frac{i}{(ia - x)^2} - \frac{i(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2} = \\ &= i \frac{(ia + x)^2 - (x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{2ax}{(x^2 + a^2)^2} = \operatorname{Im} f(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^2} - i \frac{2ax}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{(x - ia)^2}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{(x + ia)^2}.$$

Завдання: відновити функцію $f(x)$, якщо

$$6.7.1. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^4 + 8x^2 + 16}.$$

$$6.7.7. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{2x}{4x^2 + 1}.$$

$$6.7.2. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{1}{4x^2 + 1}.$$

$$6.7.8. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{4x}{x^4 + 8x^2 + 16}.$$

$$6.7.3. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^4 + 18x^2 + 81}.$$

$$6.7.9. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{3x}{9x^2 + 4}.$$

$$6.7.4. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{2}{9x^2 + 4}.$$

$$6.7.10. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{6x}{x^4 + 18x^2 + 81}.$$

$$6.7.5. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^4 + 32x + 256}.$$

$$6.7.11. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{x}{2x^2 + 1}.$$

$$6.7.6. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{1}{2x^2 + 1}.$$

$$6.7.12. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{8x}{x^4 + 32x + 256}.$$

$$6.7.13. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2x + 1}.$$

$$6.7.14. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{1}{9x^2 + 1}.$$

$$6.7.15. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^4 + 50x + 625}.$$

$$6.7.16. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{1}{16x^2 + 1}.$$

$$6.7.17. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{3x}{9x^2 + 1}.$$

$$6.7.18. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{2x}{x^4 + 2x + 1}.$$

$$6.7.19. \quad \operatorname{Re} f(x) = \frac{4x}{16x^2 + 1}.$$

$$6.7.20. \quad \operatorname{Im} f(x) = -\frac{10x}{x^4 + 50x + 625}.$$

Номери завдань за варіантами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5	1.1.6	1.1.7	1.1.8	1.1.9	1.1.10
1.1.5	1.1.10	1.1.15	1.1.19	1.1.1	1.1.11	1.1.6	1.1.18	1.1.3	1.1.20
1.1.14	1.1.5	1.1.2	1.1.15	1.1.10	1.1.13	1.1.16	1.1.6	1.1.1	1.1.11
1.1.20	1.1.1	1.1.19	1.1.6	1.1.13	1.1.18	1.1.14	1.1.7	1.1.2	1.1.16
1.1.21	1.1.22	1.1.23	1.1.24	1.1.25	1.1.26	1.1.27	1.1.28	1.1.29	1.1.30
1.1.41	1.1.42	1.1.43	1.1.44	1.1.45	1.1.46	1.1.47	1.1.48	1.1.49	1.1.50
1.2.1	1.2.2	1.2.3	1.2.4	1.2.5	1.2.6	1.2.7	1.2.8	1.2.9	1.2.10
1.3.1	1.3.2	1.3.3	1.3.4	1.3.5	1.3.6	1.3.7	1.3.8	1.3.9	1.3.10
1.4.1	1.4.2	1.4.3	1.4.4	1.4.5	1.4.6	1.4.7	1.4.8	1.4.9	1.4.10
1.5.1	1.5.2	1.5.3	1.5.4	1.5.5	1.5.6	1.5.7	1.5.8	1.5.9	1.5.10
1.5.21	1.5.22	1.5.23	1.5.24	1.5.25	1.5.26	1.5.27	1.5.28	1.5.29	1.5.39
1.6.1	1.6.2	1.6.3	1.6.4	1.6.5	1.6.6	1.6.7	1.6.8	1.6.9	1.6.19
1.6.26	1.6.23	1.6.27	1.6.28	1.6.34	1.6.35	1.6.24	1.6.25	1.6.29	1.6.30
2.1.1	2.1.2	2.1.3	2.1.4	2.1.5	2.1.6	2.1.7	2.1.8	2.1.9	2.1.10
2.1.19	2.1.20	2.1.21	2.1.22	2.1.23	2.1.37	2.1.38	2.1.24	2.1.25	2.1.26
2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.2.4	2.2.5	2.2.6	2.2.7	2.2.8	2.2.9	2.2.10
2.2.21	2.2.22	2.2.23	2.2.24	2.2.25	2.2.26	2.2.27	2.2.28	2.2.29	2.2.30
2.2.41	2.2.42	2.2.43	2.2.44	2.2.45	2.2.46	2.2.47	2.2.48	2.2.49	2.2.50
2.3.1	2.3.2	2.3.3	2.3.4	2.3.5	2.3.6	2.3.7	2.3.8	2.3.9	2.3.10
3.1.1	3.1.2	3.1.3	3.1.4	3.1.5	3.1.6	3.1.7	3.1.10	3.1.11	3.1.12
3.1.21	3.1.22	3.1.23	3.1.24	3.1.25	3.1.26	3.1.27	3.1.28	3.1.29	3.1.30
3.2.1	3.2.2	3.2.3	3.2.4	3.2.5	3.2.6	3.2.7	3.2.8	3.2.9	3.2.10
3.2.21	3.2.22	3.2.23	3.2.24	3.2.25	3.2.26	3.2.27	3.2.28	3.2.29	3.2.30
3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.3.4	3.3.5	3.3.6	3.3.7	3.3.8	3.3.9	3.3.10
3.3.21	3.3.22	3.3.23	3.3.24	3.3.25	3.3.26	3.3.27	3.3.28	3.3.29	3.3.30
3.4.1	3.4.2	3.4.3	3.4.4	3.4.5	3.4.6	3.4.7	3.4.15	3.4.30	3.4.8
3.4.20	3.4.21	3.4.22	3.4.23	3.4.24	3.4.25	3.4.26	3.4.27	3.4.31	3.4.32
4.1.1	4.1.2	4.1.3	4.1.4	4.1.5	4.1.6	4.1.7	4.1.8	4.1.17	4.1.19
4.2.1	4.2.2	4.2.3	4.2.4	4.2.5	4.2.6	4.2.7	4.2.8	4.2.9	4.2.10
4.3.1	4.3.2	4.3.3	4.3.4	4.3.5	4.3.7	4.3.8	4.3.20	4.3.11	4.3.6
4.4.1	4.4.2	4.4.3	4.4.4	4.4.5	4.4.6	4.4.7	4.4.8	4.4.9	4.4.10
4.5.1	4.5.2	4.5.3	4.5.4	4.5.5	4.5.6	4.5.7	4.5.8	4.5.9	4.5.10

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.5.21	4.5.22	4.5.23	4.5.24	4.5.25	4.5.26	4.5.27	4.5.28	4.5.29	4.5.30
4.5.41	4.5.42	4.5.43	4.5.44	4.5.45	4.5.46	4.5.47	4.5.48	4.5.49	4.5.50
4.5.61	4.5.62	4.5.63	4.5.64	4.5.65	4.5.66	4.5.67	4.5.68	4.5.69	4.5.70
5.1.1	5.1.2	5.1.3	5.1.4	5.1.5	5.1.6	5.1.7	5.1.8	5.1.9	5.1.10
5.1.11	5.1.12	5.1.25	5.1.26	5.1.27	5.1.28	5.1.29	5.1.30	5.1.31	5.1.32
5.1.41	5.1.42	5.1.43	5.1.44	5.1.45	5.1.46	5.1.47	5.1.48	5.1.49	5.1.50
5.2.1	5.2.2	5.2.3	5.2.4	5.2.5	5.2.11	5.2.12	5.2.13	5.2.14	5.2.15
5.2.30	5.2.31	5.2.17	5.2.18	5.2.19	5.2.20	5.2.21	5.2.22	5.2.23	5.2.24
5.3.1	5.3.2	5.3.3	5.3.4	5.3.5	5.3.6	5.3.18	5.3.19	5.3.20	5.3.21
5.3.26	5.3.27	5.3.28	5.3.29	5.3.30	5.3.31	5.3.13	5.3.14	5.3.15	5.3.16
5.3.41	5.3.42	5.3.43	5.3.44	5.3.45	5.3.46	5.3.47	5.3.55	5.3.56	5.3.57
5.4.1	5.4.11	5.4.2	5.4.12	5.4.13	5.4.3	5.4.4	5.4.17	5.4.18	5.4.5
5.5.1	5.5.2	5.5.3	5.5.4	5.5.5	5.5.6	5.5.7	5.5.8	5.5.9	5.5.10
5.6.12	5.6.1	5.6.2	5.6.3	5.6.4	5.6.5	5.6.17	5.6.18	5.6.19	5.6.20
5.6.31	5.6.32	5.6.33	5.6.34	5.6.35	5.6.36	5.6.37	5.6.38	5.6.39	5.6.40
6.1.1	6.1.2	6.1.3	6.1.4	6.1.5	6.1.6	6.1.7	6.1.8	6.1.9	6.1.10
6.1.21	6.1.22	6.1.23	6.1.24	6.1.25	6.1.26	6.1.27	6.1.28	6.1.29	6.1.30
6.3.1	6.3.2	6.3.3	6.3.4	6.3.5	6.3.6	6.3.7	6.3.8	6.3.9	6.3.10
6.3.21	6.3.22	6.3.23	6.3.24	6.3.25	6.3.26	6.3.27	6.3.28	6.3.29	6.3.30
6.4.1	6.4.2	6.4.3	6.4.4	6.4.5	6.4.6	6.4.7	6.4.8	6.4.9	6.4.10
6.5.1	6.5.2	6.5.3	6.5.4	6.5.5	6.5.6	6.5.7	6.5.8	6.5.9	6.5.10
6.5.11	6.5.12	6.5.13	6.5.14	6.5.15	6.5.16	6.5.17	6.5.18	6.5.19	6.5.20
6.6.1	6.6.2	6.6.5	6.6.6	6.6.7	6.6.3	6.6.4	6.6.19	6.6.20	6.6.21
6.6.18	6.6.34	6.6.35	6.6.36	6.6.22	6.6.23	6.6.24	6.6.25	6.6.26	6.6.27
6.7.1	6.7.2	6.7.3	6.7.4	6.7.5	6.7.6	6.7.13	6.7.14	6.7.15	6.7.16

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.1.11	1.1.12	1.1.13	1.1.14	1.1.15	1.1.16	1.1.17	1.1.18	1.1.19	1.1.20
1.1.12	1.1.17	1.1.7	1.1.4	1.1.13	1.1.14	1.1.2	1.1.16	1.1.9	1.1.8
1.1.8	1.1.20	1.1.19	1.1.12	1.1.7	1.1.3	1.1.18	1.1.9	1.1.17	1.1.4
1.1.17	1.1.15	1.1.8	1.1.9	1.1.4	1.1.10	1.1.5	1.1.11	1.1.3	1.1.12
1.1.31	1.1.32	1.1.33	1.1.34	1.1.35	1.1.36	1.1.37	1.1.38	1.1.39	1.1.40
1.1.41	1.1.42	1.1.43	1.1.44	1.1.45	1.1.46	1.1.47	1.1.48	1.1.49	1.1.50
1.2.11	1.2.12	1.2.13	1.2.14	1.2.15	1.2.16	1.2.17	1.2.18	1.2.19	1.2.20
1.3.11	1.3.12	1.3.13	1.3.14	1.3.15	1.3.16	1.3.17	1.3.18	1.3.19	1.3.20
1.4.11	1.4.12	1.4.13	1.4.14	1.4.15	1.4.16	1.4.17	1.4.18	1.4.19	1.4.20
1.5.11	1.5.12	1.5.13	1.5.14	1.5.15	1.5.16	1.5.17	1.5.18	1.5.19	1.5.20
1.5.40	1.5.30	1.5.31	1.5.32	1.5.33	1.5.34	1.5.35	1.5.36	1.5.37	1.5.38
1.6.10	1.6.11	1.6.12	1.6.13	1.6.14	1.6.15	1.6.16	1.6.17	1.6.18	1.6.20
1.6.21	1.6.22	1.6.31	1.6.32	1.6.33	1.6.36	1.6.37	1.6.38	1.6.39	1.6.40
2.1.11	2.1.12	2.1.35	2.1.36	2.1.13	2.1.14	2.1.15	2.1.16	2.1.17	2.1.18
2.1.27	2.1.28	2.1.29	2.1.30	2.1.31	2.1.32	2.1.33	2.1.34	2.1.40	2.1.39
2.2.11	2.2.12	2.2.13	2.2.14	2.2.15	2.2.16	2.2.17	2.2.18	2.2.19	2.2.20

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2.2.31	2.2.32	2.2.33	2.2.34	2.2.35	2.2.36	2.2.37	2.2.38	2.2.39	2.2.40
2.2.51	2.2.52	2.2.53	2.2.54	2.2.55	2.2.56	2.2.57	2.2.58	2.2.59	2.2.60
2.3.11	2.3.12	2.3.13	2.3.14	2.3.15	2.3.16	2.3.17	2.3.18	2.3.19	2.3.20
3.1.13	3.1.14	3.1.15	3.1.16	3.1.8	3.1.17	3.1.18	3.1.9	3.1.19	3.1.20
3.1.31	3.1.32	3.1.33	3.1.34	3.1.35	3.1.36	3.1.37	3.1.38	3.1.39	3.1.40
3.2.11	3.2.12	3.2.13	3.2.14	3.2.15	3.2.16	3.2.17	3.2.18	3.2.19	3.2.20
3.2.31	3.2.32	3.2.33	3.2.34	3.2.35	3.2.36	3.2.37	3.2.38	3.2.39	3.2.40
3.3.11	3.3.12	3.3.13	3.3.14	3.3.15	3.3.16	3.3.17	3.3.18	3.3.19	3.3.20
3.3.31	3.3.32	3.3.33	3.3.34	3.3.35	3.3.36	3.3.37	3.3.38	3.3.39	3.3.40
3.4.9	3.4.10	3.4.11	3.4.12	3.4.13	3.4.14	3.4.34	3.4.28	3.4.29	3.4.19
3.4.33	3.4.16	3.4.35	3.4.36	3.4.37	3.4.38	3.4.39	3.4.40	3.4.17	3.4.18
4.1.9	4.1.10	4.1.11	4.1.12	4.1.13	4.1.14	4.1.15	4.1.16	4.1.18	4.1.20
4.2.11	4.2.12	4.2.13	4.2.14	4.2.15	4.2.16	4.2.17	4.2.18	4.2.19	4.2.20
4.3.12	4.3.13	4.3.14	4.3.15	4.3.16	4.3.17	4.3.18	4.3.19	4.3.9	4.3.10
4.4.1	4.4.2	4.4.3	4.4.4	4.4.5	4.4.6	4.4.7	4.4.8	4.4.9	4.4.10
4.5.11	4.5.12	4.5.13	4.5.14	4.5.15	4.5.16	4.5.17	4.5.18	4.5.19	4.5.20
4.5.31	4.5.32	4.5.33	4.5.34	4.5.35	4.5.36	4.5.37	4.5.38	4.5.39	4.5.40
4.5.51	4.5.52	4.5.53	4.5.54	4.5.55	4.5.56	4.5.57	4.5.58	4.5.59	4.5.60
4.5.61	4.5.62	4.5.63	4.5.64	4.5.65	4.5.66	4.5.67	4.5.68	4.5.69	4.5.70
5.1.15	5.1.16	5.1.17	5.1.18	5.1.19	5.1.20	5.1.21	5.1.22	5.1.23	5.1.24
5.1.13	5.1.14	5.1.33	5.1.34	5.1.35	5.1.36	5.1.37	5.1.38	5.1.39	5.1.40
5.1.41	5.1.42	5.1.43	5.1.44	5.1.45	5.1.46	5.1.47	5.1.48	5.1.49	5.1.50
5.2.16	5.2.6	5.2.7	5.2.8	5.2.9	5.2.10	5.2.26	5.2.27	5.2.28	5.2.29
5.2.25	5.2.32	5.2.33	5.2.34	5.2.35	5.2.36	5.2.37	5.2.38	5.2.39	5.2.40
5.3.22	5.3.23	5.3.24	5.3.25	5.3.7	5.3.8	5.3.9	5.3.10	5.3.11	5.3.12
5.3.17	5.3.32	5.3.37	5.3.33	5.3.34	5.3.35	5.3.36	5.3.38	5.3.39	5.3.40
5.3.48	5.3.49	5.3.50	5.3.51	5.3.52	5.3.53	5.3.54	5.3.58	5.3.59	5.3.60
5.4.6	5.4.19	5.4.9	5.4.10	5.4.14	5.4.15	5.4.16	5.4.7	5.4.8	5.4.20
5.5.11	5.5.12	5.5.13	5.5.14	5.5.15	5.5.16	5.5.17	5.5.18	5.5.19	5.5.20
5.6.6	5.6.7	5.6.13	5.6.14	5.6.15	5.6.8	5.6.16	5.6.9	5.6.10	5.6.11
5.6.21	5.6.22	5.6.23	5.6.24	5.6.25	5.6.26	5.6.27	5.6.28	5.6.29	5.6.30
6.1.11	6.1.12	6.1.13	6.1.14	6.1.15	6.1.16	6.1.17	6.1.18	6.1.19	6.1.20
6.1.31	6.1.32	6.1.33	6.1.34	6.1.35	6.1.36	6.1.37	6.1.38	6.1.39	6.1.40
6.3.11	6.3.12	6.3.13	6.3.14	6.3.15	6.3.16	6.3.17	6.3.18	6.3.19	6.3.20
6.3.31	6.3.32	6.3.33	6.3.34	6.3.35	6.3.36	6.3.37	6.3.38	6.3.39	6.3.40
6.4.11	6.4.12	6.4.13	6.4.14	6.4.15	6.4.16	6.4.17	6.4.18	6.4.19	6.4.20
6.5.1	6.5.2	6.5.3	6.5.4	6.5.5	6.5.6	6.5.7	6.5.8	6.5.9	6.5.10
6.5.21	6.5.22	6.5.23	6.5.24	6.5.25	6.5.26	6.5.27	6.5.28	6.5.29	6.5.30
6.6.8	6.6.9	6.6.10	6.6.11	6.6.12	6.6.13	6.6.14	6.6.15	6.6.16	6.6.17
6.6.28	6.6.29	6.6.30	6.6.31	6.6.32	6.6.38	6.6.39	6.6.40	6.6.33	6.6.37
6.7.7	6.7.8	6.7.9	6.7.10	6.7.11	6.7.12	6.7.17	6.7.18	6.7.19	6.7.20

Список рекомендованой литературы

Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. — М.: Наука, 1970. — 319 с.

Гельфонд А.О. Вычеты и их приложения. — М.: Наука, 1966. — 112 с.

Грищенко А.О. Теорія функцій комплексної змінної / А.О. Грищенко, М.І. Нагнибіда, П.П. Настасів. — К.: Вища шк., 1994. — 375 с.

Грищенко А.Е. Теория функций комплексного переменного. Решение задач / А.Е. Грищенко, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасев. — К.: Вища шк., 1986. — 336 с.

Гурвиц А. Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. — М.: Наука, 1968. — 648 с.

Комплексний аналіз: В 2 т. / В.Г. Доронін, А.О. Лигун, В.П. Моторний, О.В. Моторна. — Д.: ДДУ, 1997 — 1999. — Т.1. — 128 с.; Т.2. — 140 с.

Евграфов М.А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965. — 471 с.

Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 296 с.

Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 749 с.

Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Физматгиз, 1961. — 335 с.

Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: В 2 т. — М.: Наука, 1967–1968. — Т.1. — 486 с.; Т.2. — 624 с.

Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1979. — 444 с.

Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М.А. Евграфова. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. — М.: Наука, 1974. — 319 с.

Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. — М.: Наука, 1982. — 488 с.

Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

Зміст

Передмова	3
1. Числа, криві та області на комплексній площині	4
1.1. Арифметичні дії з комплексними числами	7
1.2. Геометрична інтерпретація комплексних чисел	9
1.3. Корінь n -го степеня	11
1.4. Рівняння в комплексних змінних	12
1.5. Криві на комплексній площині	13
1.6. Області на комплексній площині	15
2. Елементарні функції комплексної змінної	17
2.1. Тригонометричні та гіперболічні функції	17
2.2. Логарифмічна та обернені тригонометричні й гіперболічні функції	19
2.3. Рівняння з елементарними функціями	22
3. Диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної	24
3.1. Регулярність функцій комплексної змінної	25
3.2. Відновлення регулярних функцій	26
3.3. Інтегрування по кривій	30
3.4. Застосування інтегральної формули Коші	34
4. Функціональні ряди в комплексній області	38
4.1. Ряди з комплексними числами	38
4.2. Степеневі ряди. Ряд Тейлора	40
4.3. Розвинення функцій у ряд Тейлора	42
4.4. Нулі регулярних функцій	45
4.5. Ряд Лорана	48
5. Особливі точки і лишки функцій комплексної змінної	54
5.1. Ізольовані особливі точки однозначного характеру	54
5.2. Лишки та їх обчислення	57
5.3. Обчислення контурних інтегралів за допомогою лишків	64
5.4. Логарифмічний лишок. Принцип аргументу	69
5.5. Визначення числа нулів багаточлена в півплощині	71
5.6. Теорема Руше	75

6. Обчислення означених інтегралів за допомогою	
лишків	78
6.1. Обчислення означених інтегралів типу $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$. . .	78
6.2. Обчислення невластних інтегралів	80
6.3. Обчислення невластних інтегралів типу $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	81
6.4. Застосування леми Жордана до інтегралів типу $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$.	85
6.5. Невласні інтеграли від багатозначних функцій	87
6.6. Головне значення інтеграла за Коші	92
6.7. Дисперсійні співвідношення	99
Номери завдань за варіантами	103
Список рекомендованої літератури	106