

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ



1 Экспериментальные обоснования квантовой механики

1. Возможно ли поглощение фотона покоящейся частицей, массой m ?
2. Частица A массы m с импульсом $\vec{p}$ налетает на покоящуюся частицу B с массой M . Возможно ли поглощение?
3. Вывести зависимость изменения длины волны фотона от угла рассеяния для эффекта Комптона.
4. Какой скоростью должен обладать электрон, чтобы иметь такой же импульс, как у фотона с длиной волны в $1 \text{ \AA}$? Оценить изменения при рассмотрении релятивистского и нерелятивистского пределов.
5. Написать уравнение волны де-Бройля для свободно движущейся частицы массой m под произвольным углом к осям координат.
6. Насколько отличаются длины волн де-Бройля для протона и нейтрона; протона и электрона; электрона и нейтрона движущихся с одинаковой кинетической энергией 1 eV ? Оценить изменения при рассмотрении релятивистского и нерелятивистского пределов.
7. Найти скорости и кинетические энергии электрона, протона и нейтрона, де-Бройлевские длины волн которых имеют длину в $1 \text{ \AA}$.
8. Найти отношение длин волн де-Бройля для электрона и протона, ускоренных одинаковой разницей потенциалов.¹
9. Найти выражения для фазовой $\vec{v}$ и групповой $\vec{u}$ скоростей волны де-Бройля, которые описывают свободную нерелятивистскую частицу. Какое из этих выражений совпадает со скоростью частицы в ньютоновой механике?
10. Найти выражение для групповой скорости $\vec{u}$ волны де-Бройля релятивистской частицы. Найти также ее фазовую скорость $\vec{v}$ и сравнить ее со скоростью света в вакууме. Противоречит ли этот результат утверждению о предельном характере скорости света?
11. Найти де-Бройлевскую длину волны λ :
 - (а) электрона, который движется со скоростью $v = 106 \text{ м/с}$;
 - (б) атома водорода, который движется со скоростью, которая равняется наиболее возможной скорости для температуры $T = 300 \text{ К}$;
 - (в) мухи массой $m = 1 \text{ г}$, которая движется со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$.
12. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти протон, чтобы его длина волны де-Бройля λ равнялась $0,4 \text{ нм}$? Какой будет циклическая частота ω колебаний этой волны?
13. Найти длину волны де-Бройля протона λ_p , который прошел разность потенциалов $U = 104 \text{ В}$, и сравнить ее с длиной фотона λ_f , что имеет ту же энергию.
14. Найти длину волны де-Бройля λ для электрона, который имеет энергию, которая отвечает средней кинетической энергии молекул двухатомного газа при $t = 17^\circ \text{C}$.
15. Электрон находится на третьей боровской орбите атома, радиус которой $r = 0,48 \text{ нм}$. Принять $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$; $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.
 - (а) найти длину волны де Бройля этого электрона (в нм);
 - (б) чему станет равна длина волны де Бройля этого электрона (в нм) на четвертой боровской орбите;
 - (в) чему равна скорость этого электрона (в км/с);
 - (г) чему равен импульс этого электрона;
 - (д) чему станет равен импульс этого электрона при переходе на четвертую орбиту;

- (f) чему станет равна скорость этого электрона (в км/с) при переходе на четвертую орбиту;
- (g) чему станет равна кинетическая энергия этого электрона (в eV) при переходе на четвертую орбиту.
16. Какую дополнительную энергию надо передать электрону для того, чтобы длина его волны изменилась от $\lambda_1 = 0,12$ нм до $\lambda_2 = 0,04$ нм?
 17. Получить в общем виде формулу, выражающую зависимость длины волны де-Бройля от ускоряющей разности потенциалов для релятивистской частицы.
 18. Найти зависимость фазовой скорости элементарной частицы, движущейся в пустоте со скоростью близкой к скорости света, от соответствующей длины волны де-Бройля.
 19. Считая, что при малых скоростях частицы выполняется условие $p^2 \ll m^2 c^2$, найти приближенную зависимость энергии частицы от импульса с точностью до p^4 .
 20. Частица массы M распадается на две частицы массами m_1 и m_2 . Найти энергии распавшихся частиц в системе центра масс.
 21. Нейтрон с кинетической энергией $T = 25$ eV налетает на ядро ${}^2\text{He}$, которое находится в состоянии покоя. Найти длины волн де-Бройля λ_1 и λ_2 обеих частиц в системе их центра инерции.
 22. Протон и α -частица, прошедшие одинаковую ускоряющую разность потенциалов $U = 10$ кВ, движутся перпендикулярно друг другу. Найти длины волн де-Бройля λ_α и λ_p частиц в системе их центра инерции.
 23. Показать невозможность процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma$.

2 Операторы в квантовой механике

1. Найти явный вид операторов $\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2$, $\left(\frac{d}{dx} - x\right)^3$, $\left(\frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\right)^3$, $\left(x\frac{d}{dx}\right)^2$, $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$.
2. Раскрыть скобки $\left(\frac{\hat{x}}{x_0} - \frac{\hat{p}_x}{p_0}\right)\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + \frac{\hat{p}_x}{p_0}\right)$, $\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + \frac{\hat{p}_x}{p_0}\right)^2$, $\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + \frac{\hat{p}_x}{p_0}\right)^3$, предполагая, что x_0 и p_0 — константы с размерностью координаты и импульса соответственно.
3. Показать, что для любого оператора $\hat{a}$ выполняется условие $\hat{a}^2 = 1$, справедливо соотношение $e^{i\lambda\hat{a}} = \cos \lambda + i\hat{a} \sin \lambda$.
4. Проверить, являются ли операторы $-ix\frac{d}{dx}$, $-ix^2\frac{d}{dx}$, $x^2 \cos x$, $i\frac{d}{dx}$, $-i \cos x \frac{d}{dx}$ эрмитовыми?
5. Найти операторы эрмитово сопряженные операторам $i\frac{\partial}{\partial x}$, $x\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$.
6. Для заданных трех операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ найти правила коммутации $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]$ и $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$.
7. Для операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$, удовлетворяющих соотношению $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$, найти $\hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L}$.
8. Раскрыть скобки в произведениях операторов $(\hat{F} - \hat{G})(\hat{F} + \hat{G})$, $(\hat{F} + \hat{G})^2$.
9. Выразить оператор $(\hat{F}\hat{G})^{-1}$ через $\hat{F}^{-1}$ и $\hat{G}^{-1}$.
10. Для произвольного оператора $\hat{L}$ показать, что операторы $\hat{L}^+\hat{L}$, $\hat{L}\hat{L}^+$, $\hat{L} + \hat{L}^+$ и $i(\hat{L} - \hat{L}^+)$ будут эрмитовыми.
11. Если оператор $\hat{C}$ эрмитов, то оператор $\hat{G} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^+$ также эрмитов.
12. Показать, что произвольный оператор $\hat{\Omega}$ можно представить в виде $\hat{\Omega} = \hat{A} + i\hat{B}$, где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — эрмитовы операторы.
13. Показать, что если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ эрмитовы операторы, то операторы $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ и $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ также эрмитовы.
14. Если оператор $\hat{P}$ неэрмитов, то в каком случае оператор $\hat{P}^2$ будет эрмитовым.

15. Доказать самосопряженность операторов физических величин, оператора инверсии, операторов $\hat{A} = \hat{F}^+ \hat{F}$ и $\hat{B} = \hat{G} \hat{G}^+$.
16. Операторы $\hat{F}$ и $\hat{G}$ эрмитовы. Доказать самосопряженность $i[\hat{F}, \hat{G}]$.
17. Показать, что произведение унитарных операторов само является унитарным оператором.
18. Показать, что собственные функции унитарного оператора ортогональны и собственные значения по модулю равны 1.
19. Предполагая λ малой величиной, найти разложение в ряд оператора $(\hat{A} - \lambda \hat{B})^{-1}$ по степеням λ .
20. Доказать соотношение Бекера–Кэмпбела–Хаусдорфа

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] \dots$$

21. Для операторов, удовлетворяющих условиям $[\hat{F}, [\hat{F}, \hat{G}]] = 0$, $[\hat{G}, [\hat{F}, \hat{G}]] = 0$, доказать тождество Вейля $e^{\hat{F} + \hat{G}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{F}, \hat{G}]} e^{\hat{F}} e^{\hat{G}}$.
22. Найти следующие коммутаторы $[\vec{r}, (\vec{r} \hat{p})]$, $[\hat{p}, \vec{r}^2]$, $[\vec{r}^2, (\vec{r} \hat{p})]$, $[\hat{p}^2, (\vec{r} \hat{p})]$, $[\vec{r}^2, \hat{H}]$, $[\hat{p}^2, \hat{H}]$, $[(\vec{r} \hat{p}), \hat{H}]$, $[\hat{M}_i, \hat{r}^2]$, $[\hat{M}_i, \hat{p}^2]$, $[\hat{M}_i, (\vec{p} \hat{r})]$, $[\hat{M}_i, (\vec{p} \hat{r})^2]$, $[\hat{M}_i, (\vec{p} \hat{r}) \hat{p}]$, $[\hat{M}_i, (\vec{p} \hat{r}) \hat{r}]$, $[\hat{M}_i, (a \hat{r} + b \hat{p})]$, $[\hat{M}_i, \hat{x}_k \hat{x}_l]$, $[\hat{M}_i, \hat{p}_k \hat{p}_l]$, $[\hat{M}_i, \hat{x}_k \hat{p}_l]$, $[(\vec{p} \hat{r}), [\hat{p} \hat{r}]]$, $[-i \hat{M}_y, \hat{x} \hat{p}_z]$, $[i \hat{M}_z, \hat{y} \hat{p}_x]$, $[-i \hat{M}_x, \hat{z} \hat{p}_y]$, $[\hat{M}_-, \hat{M}_+]$, $[\hat{M}^2, \hat{x} + \hat{p}_y]$, $[\hat{M}^2, \hat{z} - \hat{p}_y]$, $[\hat{M}^2, \hat{y} - \hat{p}_x]$, $[\hat{M}^2, \hat{M}_x]$, $[\hat{M}^2, \hat{M}_y]$, $[\hat{M}^2, \hat{M}_z]$, $[\hat{M}_\pm, \hat{M}_z]$, $[\hat{M}_\pm, \hat{M}_x]$, $[\hat{M}_\pm, \hat{M}_y]$.
23. Найти следующие коммутаторы $[V(\vec{r}), \hat{p}]$, $[\vec{A}(\vec{r}), \hat{p}]$, $[V(\vec{r}), \hat{M}]$, $[\vec{A}(\vec{r}), \hat{M}]$, $[V(r), \hat{M}^2]$, предполагая $V(\vec{r})$ и $\vec{A}(\vec{r})$ — дифференцируемой скалярной и векторной функцией координат, соответственно.
24. Найти собственные функции и собственные значения операторов $\left(\frac{d}{dx}\right)$, $\left(i \frac{d}{dx}\right)$, $\left(x + \frac{d}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}\right)$, $\frac{d}{d\varphi}$, $\sin \frac{d}{d\varphi}$, $i \frac{d}{d\varphi}$, $e^{ia \frac{d}{d\varphi}}$.
25. Найти явный вид операторов отражения $\hat{I} \Psi(x) = \Psi(-x)$, сдвига $\hat{T}_a \Psi(x) = \Psi(x + a)$, изменения масштаба $\hat{M}_c \Psi(x) = \sqrt{c} \Psi(cx)$, $c > 0$ и комплексного сопряжения $\hat{K} \Psi(x) = \Psi^*(x)$, а также их собственные функции и собственные значения.
26. Получить аналитический вид оператора 3-мерного сдвига $\hat{T}_{\vec{a}} \Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} - \vec{a})$.
27. Показать, что функция Ψ является собственной функцией оператора $\hat{F}$, и найти соответствующее собственное значение:

$$(a) \quad \Psi(x) = x e^{-x^2/2}, \quad \hat{F} = \frac{d^2}{dx^2} - x^2;$$

$$(b) \quad \Psi(\theta) = \cos \theta, \quad \hat{F} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right);$$

$$(c) \quad \Psi(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \hat{F} = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi};$$

$$(d) \quad \Psi(\rho) = e^{-\rho/3} \rho^3, \quad \hat{F} = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \frac{6}{\rho^2};$$

$$(e) \quad \Psi(\theta, \varphi) = \sin \theta e^{\pm i\varphi}, \quad \hat{F} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

3 Соотношения неопределенностей Гейзенберга

1. Координату x частицы, которая свободно движется, можно определить, если поставить на пути частицы перпендикулярно к ее движению узкую щель. Доказать, что измерение координаты частицы с помощью щели толщиной b вносит в соответствующую проекцию импульса неопределенность $|\Delta p_x| > \frac{\hbar}{b}$.
2. Электрон, кинетическая энергия которого $T = 4\text{eV}$, локализованный в области размером $l = 1\text{ мкм}$. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.
3. Оценить неопределенность импульса Δp_x микрочастицы массой $m = 2 \cdot 10^{-25}\text{ кг}$, если энергия ее основного состояния в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме $E = 5 \cdot 10^{-2}\text{ eV}$.
4. Используя соотношение неопределенностей для координат и импульсов, оценить энергию основного состояния E_0 частицы массой m в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a .
5. Используя соотношение неопределенностей для координат и импульсов, оценить энергию основного состояния атома водорода и гармонического осциллятора.
6. Используя соотношение неопределенностей, оценить скорость протона v_p в атомном ядре и доказать, что в ядре не может быть электронов. Считать, что размер ядра $r_{\text{я}} = 5 \cdot 10^{-15}\text{ м}$.
7. Приняв, что наименьшая энергия нуклона в ядре $E = 10\text{ MeV}$, оценить линейные размеры ядра $r_{\text{я}}$, используя соотношения неопределенностей.
8. Частицы, масса которых $m = 10^{-11}\text{ г}$, находятся в воздухе в состоянии теплового равновесия. Считается, что частицы имеют сферическую форму, а воздух находится при нормальных условиях. Плотность вещества, из которого состоят частицы $\rho = 1,5 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$. Можно ли установить, наблюдая за движением частиц, отклонения от законов классической механики?
9. След от пучка электронов на экране электронно-лучевой трубки имеет диаметр $d = 0,5\text{ мм}$, расстояние от электронной пушки до экрана $l = 20\text{ см}$, ускоряющее напряжение $U = 10\text{ кВ}$. С помощью соотношения неопределенностей оценить неопределенность координаты Δx электрона на экране.
10. Оценить неопределенность Δv_x скорости частицы массой $m = 2,5 \cdot 10^{-25}\text{ кг}$, которая находится в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме в стационарном состоянии с энергией $E = 10\text{ MeV}$.
11. Существуют ли в природе такие состояния квантовой системы, в которых ее кинетическая и потенциальная энергии были бы определены однозначно?
12. Характерным временем в атомной физике есть время жизни возбужденного состояния $\Delta\tau = 10\text{ нс}$. Некоторый атом при переходе из возбужденного состояния в основное выпускает фотон с длиной волны $\lambda = 500\text{ нм}$. Определить энергию этого фотона ε , а также абсолютную $\Delta\varepsilon$ и относительную $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$ ширину линии излучения, которая ему отвечает.
13. Используя соотношение неопределенностей для энергии и времени, оценить ширину энергетического уровня ΔE атома водорода, время жизни которого $\tau = 10^{-8}\text{ с}$, если он находится в возбужденном состоянии; вычислить также время жизни τ_1 системы, для которой ширина энергетического уровня $E_1 = 10\text{ eV}$.
14. Установить относительную неопределенность энергии $\frac{\Delta E}{E}$ для возбужденного уровня ядра Fe^{57} , которому отвечает энергия $E = 14\text{ keV}$, а время жизни $\tau = 0,1\text{ мкс}$, и сравнить ее с соответствующим значением для первого возбужденного состояния атома водорода, считая, что время его жизни $\tau_1 = 10\text{ нс}$.

15. Электрон локализован в области с линейным размером 1,0 мкм. Среднее значение его кинетической энергии $E_k = 4,0$ эВ. Оценить с помощью соотношения Гейзенберга неопределенность ΔE_k его кинетической энергии.
16. Во сколько раз длина волны де Бройля частицы λ меньше неопределенности ее координаты Δx , которая соответствует относительной неопределенности импульса $\Delta p/p$ в 1%?
17. Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределенность кинетической энергии $\Delta E_k/E_k = 1,6 \cdot 10^{-4}$. Оценить, во сколько раз неопределенность координаты Δx такой частицы больше ее длины волны де Бройля λ ?
18. Протон локализован в области размером 0,1 нм. Оценить кинетическую энергию протона E_k , при котором ее относительная неопределенность $\Delta E_k/E_k$ будет порядка 0,01. Ответ привести в электрон-вольтах.
19. Оценить относительную ошибку $\Delta V/V$ в определении скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома порядка 0,1 нм. Средняя скорость электрона на орбите равна $V = c/137$, где c — скорость света.
20. Предполагается, что неопределенность координаты Δx движущейся частицы равна длине волны де Бройля λ . Определить относительную неточность $\Delta p/p$ определения импульса этой частицы.
21. Положение центра шарика массой $m = 1$ г и положение электрона известно с точностью до $\Delta x = 1$ мкм. Найти наименьшую ошибку ΔV , с которой при этом можно определить скорость шарика и скорость электрона.
22. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода, считая, что один оборот электрона вокруг ядра происходит за $\tau = 1,5 \cdot 10^{-16}$ с. Ответ привести в электрон-вольтах.
23. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальное расстояние между ядром и электроном в атоме водорода, считая, что средняя скорость электрона на орбите равна $V = c/137$, где c — скорость света, а неопределенность скорости не превосходит этого значения.
24. Оценить ширину спектральной линии $\Delta \lambda$, если время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-8}$ с, а длина волны излучаемого фотона $\lambda = 0,6$ мкм.
25. Воспользовавшись принципом неопределенности, оценить кинетическую энергию нуклона (протона или нейтрона) в ядре. Линейные размеры ядра принять равными 5 фм.
26. Внутри сферической полости радиуса $R = 10$ пм находится частица массы $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимально возможную энергию частицы.
27. Частица массы $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг находится в одномерной потенциальной яме шириной 100 пм с бесконечно высокими стенками. Оценить минимально возможную силу давления частицы на стенки ямы.
28. Атом испустил фотон с длиной волны 0,6 мкм. Оценить неопределенность Δx , с которой можно установить координату фотона в направлении его движения.
29. Моноэнергетический пучок электронов с кинетической энергией 10 эВ падает на щель шириной 10 нм. Считая, что неопределенность координаты $\Delta x = a$, оценить возможный угол отклонения β электрона от первоначального направления.
30. Поток электронов с длиной волны де Бройля 0,6 мкм падает нормально на прямоугольную щель шириной $b = 0,1$ мм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей угловую ширину пучка $\Delta \varphi$ за щелью (в угловых градусах).
31. При электронном переходе в атоме момент импульса изменяется на величину ΔL . С помощью соотношения неопределенностей оценить количество оборотов N вокруг ядра, которое совершает электрон при переходе с одной орбиты на другую.

32. Электрон, неопределенность кинетической энергии которого 1 мэВ, влетает в магнитное поле с индукцией 54 мТл и движется по окружности. С помощью соотношения неопределенностей оценить неопределенность угловой координаты электрона $\Delta\varphi$.
33. Доказать общее соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$D_f^2 D_g^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad [\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar.$$

4 Волновая функция микрочастицы и ее физический смысл

1. Частица приведена в состояние с волновой функцией $\Psi(x) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi x}{a}, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases}$. Вычислить нормировочную константу A .
2. Частица приведена в состояние с волновой функцией $\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)$, где $x_0 > 0$ — константа с размерностью длины. Вычислить A .
3. Волновой пакет задается функцией $\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2} + ik_0 x\right)$, где $x_0 > 0$ — константа с размерностью длины, определяющая ширину пакета, k_0 — константа с размерностью волнового числа. Вычислить нормировочную константу A .
4. Волновая функция, зависящая от полярного угла φ , задается выражением $\Psi(x) = A e^{i\alpha\varphi}$, где α — некоторая константа. Используя стандартные условия, определить возможные значения α и нормировать волновую функцию.
5. Нормировать волновые функции $\Psi_1(\theta, \varphi) = A_1$, $\Psi_2(\theta, \varphi) = A_2 \cos \theta$ на единичной сфере.
6. Волновая функция задается на всей вещественной оси выражением:

$$\begin{aligned} \bullet \Psi(x) &= A x e^{\left(-\frac{x}{x_0}\right)}, \\ \bullet \Psi(x) &= A x e^{\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)}, \\ \bullet \Psi(x) &= A \left(1 + \frac{x^2}{x_0^2}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $x_0 > 0$ — константа с размерностью длины. Вычислить A .

7. Волновые функции задаются на единичной сфере в сферических координатах выражениями $\Psi_{\pm}(\theta, \varphi) = A_{\pm} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$. Вычислить нормировочные константы $A_{\pm}$.
8. Нормировать волновую функцию $\Psi(r) = A \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)$, заданную во всем пространстве в сферических координатах ($a_0 > 0$ — константа размерности длины, $Z > 0$ — безразмерная константа).
9. Волновая функция задается во всем пространстве в сферических координатах выражением $\Psi(r) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right)$, где $r_0 > 0$ — константа с размерностью длины. Вычислить A .
10. Волновая функция некоторой частицы имеет вид $\Psi = \frac{A}{r} e^{-r/\alpha}$, где r — расстояние от этой частицы до силового центра; $\alpha = 10^{-10}$ м.
 - (а) Используя условие нормировки, определите коэффициент A .
 - (б) Определить плотность вероятности нахождения этой частицы на расстоянии 2Å .

11. Волновая функция некоторой частицы имеет вид $\Psi = Ae^{-r/\alpha}$, где r — расстояние от этой частицы до силового центра; $\alpha = 10^{-10}$ м.
- Используя условие нормировки, определите коэффициент A .
 - На каком удалении r от начала координат (в нм) вероятность нахождения микрочастицы максимальна?
 - Определить плотность вероятности нахождения этой частицы на расстоянии 2Å от начала координат.
 - Определить расстояние r от частицы до силового центра (в нм), где плотность вероятности нахождения частицы равна $5,83 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$.
12. Микрочастица в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками имеет волновую функцию $\Psi = Ax(a-x)$, где $A^2 = 3 \cdot 10^{46} \text{ м}^{-5}$. Найти ширину ямы a .
13. Найти максимальную плотность вероятности нахождения микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $a = 10^{-9}$ м с бесконечными стенками, если волновая функция имеет вид $\Psi = Ax^2(a-x)^2$, $\Psi = Ax(a-x)$, $\Psi = Ax^3(a-x)$, $\Psi = Ax(a-x)^2$, $\Psi = Ax^2(a-x)$.
14. Найти координату x микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $a = 10^{-9}$ м с бесконечными стенками, при которой плотность вероятности ее нахождения максимальна. Волновая функция микрочастицы имеет вид $\Psi = Ax^5(a-x)^2$, $\Psi = Ax^4(a-x)$, $\Psi = Ax(a-x)^2$, $\Psi = Ax(a-x)^3$, $\Psi = Ax^3(a-x)$.
15. Волновая функция микрочастицы определена только в области $0 \leq x \leq a$, где $a = 10^{-9}$ м (ширина ямы). Волновая функция $\Psi = A \sin \frac{2\pi x}{a}$, $\Psi = A \sin \frac{3\pi x}{a}$, $\Psi = A \sin \frac{4\pi x}{a}$, $\Psi = A \sin \frac{5\pi x}{a}$, $\Psi = A \sin \frac{8\pi x}{a}$.
- Найти минимальное расстояние между точками, в которых вероятность обнаружения частицы максимальна.
 - Найти максимальное расстояние между точками, в которых вероятность обнаружения частицы максимальна.
16. Волновая функция $\Psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$, $\Psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{4\pi x}{a}$, $\Psi = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{5\pi x}{a}$ описывает состояние электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, где $a = 10^{-9}$ м. Определить координату x электрона (в нм), где плотность вероятности его нахождения равна $2 \cdot 10^9 \text{ м}^{-1}$.
17. Определить функцию распределения по координате и импульсу, средние значения и среднеквадратичные отклонения координаты и импульса в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi(x) = C \exp \left(\frac{i}{\hbar} p_0 x - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2} \right)$.
18. Найти средний импульс в состоянии с волновой функцией $\Psi(x) = C e^{(\frac{i}{\hbar} p_0 x) \phi(x)}$, где $\phi(x)$ — вещественная функция.
19. Найти волновую функцию и плотность тока вероятности свободно движущейся в пространстве частицы с импульсом $\vec{p}$.

5 Стационарное уравнение Шредингера

1. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5 \cdot 10^{-29}$ кг имеет вид

$$\bullet \Psi(x, y, z) = A \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{-\gamma z}, \quad \beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}, \quad \gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1};$$

- $\Psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha x} \sin(\beta y) \sin(\gamma z)$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha x - i\beta y - \gamma z}$, $\beta = 8 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, z) = Ae^{-i\alpha x} \sin(\gamma z)$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(y, z) = A(\cos(\alpha y) + e^{i\alpha z})$.

Кинетическая энергия частицы равна $E_k = 5 \text{ эВ}$. Найти константу α . Принять $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

2. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5 \cdot 10^{-29} \text{ кг}$ имеет вид

- $\Psi(x, y) = Ae^{-\alpha x} e^{i\beta y}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x) = A(\cos(\alpha x) + e^{i\alpha x})$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$.

Найти кинетическую энергию частицы в эВ. Принять $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

3. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5 \cdot 10^{-29} \text{ кг}$ имеет вид

- $\Psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha x} \sin(\beta y) \cos(\gamma z)$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha x - \beta y} \cos(\gamma z)$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = A \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = Ae^{i\alpha x} \sin(\beta y) e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;

Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной нулю.

4. Волновая функция микрочастицы с массой $m = 2.5 \cdot 10^{-29} \text{ кг}$ имеет вид

- $\Psi_1(x, y, z) = Ae^{-\alpha x - \beta y - \gamma z}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi_2(x, y, z) = Ae^{-i\alpha x} e^{-\beta y} \cos(\gamma z)$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;

Найти полную энергию частицы (в эВ), считая потенциальную энергию равной $U_1 = 8 \text{ эВ}$ и $U_2 = 6 \text{ эВ}$. Принять $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

5. Волновая функция микрочастицы с кинетической энергией в 5 эВ имеет вид

- $\Psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha x} \sin(\beta y) \cos(\gamma z)$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha x} e^{-\beta y} e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = A \sin(\alpha x) e^{-\beta y} e^{-\gamma z}$, $\alpha = 5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = A \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = Ae^{i\alpha x} \sin(\beta y) e^{-i\gamma z}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, y, z) = Ae^{-i\alpha x + i\beta y} \cos(\gamma z)$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 6 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(x, z) = Ae^{-i\alpha x} \cos(\gamma z)$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$;
- $\Psi(y, z) = A(\cos \alpha z + e^{i\alpha y})$, $\alpha = 4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$.

Найти массу частицы. Принять $\hbar = 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

6. Частица массы m совершает свободное одномерное движение. Найти энергии и волновые функции стационарных состояний. Решить задачу также и для свободного трехмерного движения.
7. Найти энергии стационарных состояний плоского ротатора с моментом инерции I .
8. Система с не зависящим от времени гамильтонианом в начальный момент времени находилась в состоянии с волновой функцией $\Psi(\xi, 0)$. Найти волновую функцию этой системы в последующие моменты времени $\Psi(\xi, t)$. Энергетический спектр и базис системы предполагаются известными.
9. Свободная частица имеет в момент времени $t = 0$ волновую функцию:

- $\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}} \sin\left(\frac{xp_0}{\hbar}\right);$
- $\Psi(x, 0) = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{i\frac{xp_0}{\hbar}}.$

Найти волновые функции в следующие моменты времени.

10. Как изменяется во времени состояние плоского ротатора, если в начальный момент времени он описывался волновой функцией $\Psi(x, 0) = A \sin^2 \varphi$?
11. Волновая функция частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с абсолютно непроницаемыми стенками, имела в начальный момент времени вид $\Psi(x, 0) = Ax(x-a)$. Найти волновую функцию в произвольный момент времени.
12. Состояние свободной частицы массы m в начальный момент времени задается волновым пакетом $\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2} + ik_0x\right)$, где $x_0 > 0$ — константа с размерностью длины, определяющая ширину пакета, k_0 — константа с размерностью волнового числа. Показать, что с течением времени пакет «расплывается». Найти закон «расплывания», плотность вероятности и плотность тока вероятности.
13. Плоский ротатор с моментом инерции J в момент времени $t = 0$ приведен в состояние с волновой функцией $\Psi(\varphi) = A(1 + \cos \varphi + \cos(2\varphi))$. Найти волновую функцию в последующие моменты $t > 0$.
14. Могут ли состояния с нижеприведенными волновыми функциями быть стационарными:
 - (a) $\Psi(\xi, t) = \Phi(\xi)e^{-i(\varepsilon - i\gamma)t};$
 - (b) $\Psi(\xi, t) = \Phi(\xi)e^{-i\varepsilon t} - \Phi^*(\xi)e^{i\varepsilon t};$
 - (c) $\Psi(\varphi, t) = \frac{A}{2}(1 - \cos 2\varphi)e^{2i\hbar t/\alpha};$
 - (d) $\Psi(\xi, t) = \Phi_1(\xi)e^{-i\varepsilon t} - \Phi_2(\xi)e^{-2i\varepsilon t};$
 - (e) $\Psi(\xi, t) = \Phi(\xi, t)e^{-iEt/\hbar};$
 - (f) $\Psi(\xi, t) = \Phi(\xi, t)e^{b-i\varepsilon t}.$

Все константы предполагать вещественными.

6 Дифференцирование операторов и интегралы движения

1. Найти следующие производные $\frac{d}{dt}(\hat{M}_x); \frac{d}{dt}(\hat{M}_y); \frac{d}{dt}(\hat{M}_z); \frac{d}{dt}(f(\vec{r}, t)\hat{M}_x); \frac{d}{dt}(f(\vec{r}, t)\hat{M}_y); \frac{d}{dt}(f(\vec{r}, t)\hat{M}_z); \frac{d}{dt}(\hat{p}_y\hat{x}); \frac{d}{dt}(\hat{p}_z\hat{x}); \frac{d}{dt}(\hat{p}_z\hat{y}); \frac{d}{dt}(\hat{p}_x\hat{y}); \frac{d}{dt}(\hat{p}_y\hat{z}); \frac{d}{dt}(\hat{p}_x\hat{z}).$
2. Частица с массой m движется во внешнем силовом поле с потенциальной энергией $U(\vec{r})$. Получить явный вид операторов скорости и ускорения частицы.
3. Показать, что в отсутствие силовых полей импульс сохраняется.
4. Показать, что в аксиально-симметричных силовых полях проекция орбитального момента на ось симметрии является интегралом движения.
5. Показать, что в сферически-симметричных (центральных) силовых полях квадрат орбитального момента является интегралом движения.
6. Показать, что если потенциальная энергия является четной функцией координат, то четность будет интегралом движения.
7. Показать, что для частицы, движущейся в постоянном однородном поле действия силы $\vec{f}$, величина $\vec{F} = \vec{p} - \vec{f}t$ будет интегралом движения.
8. Определить полный набор физических величин в поле $U = U(x), U = U(y), U = U(z), U = U(x, y), U = U(x, z), U = U(y, z), U = U(r)$.
9. Найти полные наборы физических величин в следующих полях:

- (a) при свободном движении;
 - (b) поле однородного бесконечного цилиндра с осью Oz ;
 - (c) поле однородной плоскости (xOy) ;
 - (d) поле бесконечной однородной полуплоскости (xOy) , $z > 0$;
 - (e) поле однородного шара;
 - (f) поле двух точечных зарядов на оси Z ;
 - (g) переменное поле однородного бесконечного цилиндра;
 - (h) переменное поле однородной бесконечной нити;
 - (i) переменное поле неподвижной точечной частицы;
 - (j) в однородном переменном поле;
 - (k) в поле равномерно заряженного бесконечного прямого провода с переменным зарядом;
 - (l) в поле однородного трехосного эллипсоида;
 - (m) в поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии с шагом a .
10. Электрон с массой m_e и зарядом $-e$ ($e > 0$) движется в поле неподвижного притягивающего кулоновского центра с зарядом $Ze > 0$. В классическом случае одним из интегралов движения был бы вектор Рунге–Ленца $\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} - \frac{[\vec{v} \times \vec{M}]}{Ze^2}$. Построить оператор, соответствующий вектору Рунге–Ленца. Показать, что эта величина сохраняется и в микромире.

7 Потенциальные ямы

1. Потенциальная энергия имеет δ -образную особенность в точке a : $V(x) = U(x) + \Omega\delta(x - a)$, где $U(x)$ — кусочно-непрерывная функция с возможным разрывом конечной величины в точке $x = a$, $\Omega = \text{const}$. Получить условия сшивки для волновой функции в этом случае.
2. Найти энергетические уровни и нормированные волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальной яме:

- $U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, x > a; \end{cases}$
- $U(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]; \\ \infty, & x \notin \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]; \end{cases}$

Определить средние значения координаты и импульса, а также их флуктуации. Проверить соотношение неопределенностей для координаты и импульса в стационарных состояниях.

3. Найти распределение вероятностей различных значений энергии частицы массы m , флуктуации ее координаты, импульса и энергии, в бесконечно глубокой потенциальной яме, ширины a , описываемой волновой функцией вида:

- $\Psi(x) = Ax(x - a)$;
- $\Psi(x) = Ax \left(x^2 - \frac{a^2}{4} \right)$;
- $\Psi(x) = B \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right)$.

4. Частица массы m движется в одномерной прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a . Найти:

- наиболее вероятные положения частицы, приведенной в первое возбужденное состояние;
- среднее значение кинетической энергии частицы в произвольном стационарном состоянии.

5. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна a . Найти массу частицы m , если разность энергий третьего и второго энергетических уровней равна ΔE .
6. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти квантовое число n энергетического уровня частицы, если интервалы энергии до соседних с ним уровней (верхнего и нижнего) относятся как $7/5$.
7. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы равна a . Найти вероятность пребывания частицы в области $a/3 < x < 2a/3$.
8. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками. Найти вероятность пребывания частицы, в области $0 < x < 2a/3$.
9. Протон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $a=1$ нм с бесконечно высокими стенками. Найти наименьшую разность энергетических уровней ΔE протона.
10. Решить уравнение Шредингера для частицы массы m , находящейся в двумерной бесконечно глубокой потенциальной яме, ширина которой по оси x равна a , а по оси y равна b ($0 < x < a$, $0 < y < b$). Найти:
 - спектр собственных значений энергии $E_{n_1 n_2}$ и собственные функции частицы $\Psi_{n_1 n_2}$;
 - вероятность ее нахождения в области $a/3 \leq x \leq 2a/3$, $b/3 \leq y \leq 2b/3$.
11. Решить уравнение Шредингера для частицы массы m , находящейся в трехмерном непроницаемом потенциальном ящике, ширина которого по оси x равна a , а по оси y равна b , по оси z равна c ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$). Найти спектр собственных значений энергии $E_{n_1 n_2 n_3}$ и собственные функции частицы $\Psi_{n_1 n_2 n_3}$.
12. Найти четные и нечетные энергетические уровни дискретного спектра частицы в симметричной потенциальной яме вида $U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$. Каково число состояний частицы в дискретном спектре в зависимости от глубины ямы? Каково условие появления новых состояний дискретного спектра при углублении ямы?
 - Найти энергетические уровни нижней части спектра в случае глубокой потенциальной ямы $U_0 \gg \hbar^2/ma^2$ и определить смещение этих уровней по сравнению с энергетическими уровнями частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме.
 - Рассмотреть симметричную потенциальную яму малой глубины $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$. Показать, что в такой яме имеется один уровень дискретного спектра, и получить приближенные выражения для энергии и нормированной волновой функции этого состояния. Найти средние значения $\overline{U(x)}$ и $\overline{T}$.
13. Найти энергетические уровни дискретного спектра и нормированные волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальной яме $U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < 2a, \\ 0, & |x| > 2a \end{cases}$. Определить средние значения координаты и импульса, а также их флуктуации. Проверить соотношение неопределенностей для координаты и импульса в стационарных состояниях.
14. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции состояний дискретного спектра частицы в поле $U(x) = -\alpha\delta(x)$, $\alpha > 0$. Найти средние значения кинетической и потенциальной энергии в этих состояниях.
15. Найти энергетические уровни частицы в поле вида $U(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x), \alpha > 0, & |x| < a, \\ \infty, & |x| > a \end{cases}$. При выполнении условия $m\alpha a/\hbar^2 \gg 1$ исследовать структуру уровней нижней части спектра. Показать, что энергетический спектр состоит из последовательности пар близко расположенных уровней, и найти расстояние между этими близко расположенными уровнями.

Каков спектр сильно возбужденных состояний частицы? Какова картина энергетических уровней при $\alpha < 0$?

16. Для частицы в поле вида $U(x) = \begin{cases} -\alpha\delta(x-a), & x > 0, \\ \infty, & x < 0, \end{cases}$ найти зависимость числа состояний дискретного спектра от параметра $m\alpha a/\hbar^2$.

17. Частица массой m_0 находится в потенциальной яме $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & x \leq 0 \leq a, \\ U_0, & x > a. \end{cases}$ Получить уравнение, определяющее спектр собственных значений энергии частицы для $E < U_0$. Обосновать дискретность энергетического спектра для $E \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m_0 a^2}$. Используя результаты задачи, найти:

- значение величины $a^2 U_0$, при котором появляется n -й дискретный уровень;
- число уровней в яме, у которой $a^2 U_0 = \frac{110 \hbar^2}{m_0}$;
- значение $a^2 U_0$, при котором энергия единственного уровня равна $U_0/2$, какова при этом вероятность нахождения частицы вне ямы?

18. Частица массой m_0 находится в потенциальной яме $U(x) = \begin{cases} U_0, & x < 0, \\ 0, & x \leq 0 \leq a, \\ U_0, & x > a. \end{cases}$ Получить уравнение, определяющее спектр собственных значений энергии частицы. Для $E < U_0$ обосновать дискретность энергетического спектра. Используя результаты задачи, найти:

- значение $a^2 U_0$, при котором энергия основного состояния равна $3U_0/4$;
- значение величины $a^2 U_0$, при котором появляется 3-й дискретный уровень;
- число энергетических уровней в яме, если $a^2 U_0 = 125 \hbar^2/m_0$;
- найти приближенное аналитическое выражение энергии нижних уровней ($E \ll U_0$), если $a^2 U_0 \gg \hbar^2/m_0$.

19. Частица массы m движется в одномерной прямоугольной асимметричной потенциальной яме конечной глубины $U(x) = \begin{cases} V_1, & x < 0, \\ 0, & x \leq 0 \leq a, \\ V_2, & x > a. \end{cases}$ Найти:

- энергии стационарных состояний частицы.
- При каком условии в яме не будет связанных состояний?
- Каково максимальное число уровней при заданных V_1 , V_2 и a ?
- Рассмотреть предельные случаи $V_1 \rightarrow \infty$ и $V_1 = V_2$.

20. Частица массы m падает вниз с ускорением g на абсолютно упругую горизонтальную поверхность. Найти энергии стационарных состояний.

21. Показать, что среднее значение силы, действующей на частицу в стационарном состоянии дискретного спектра, равно нулю.

22. Частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме. Вычислить среднюю силу, с которой частица действует на каждую из стенок ямы в стационарных состояниях. Сравнить с результатом классической механики.

8 Потенциальные барьеры

1. Определить коэффициент отражения частицы от прямоугольной потенциальной ступеньки $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & x \geq 0, \end{cases}$ в зависимости от энергии частицы E .

2. Электрон обладает энергией $E=10$ эВ. Определить, во сколько раз изменится его скорость v и длина волны де Бройля λ при прохождении через потенциальный барьер высотой $U=6$ эВ бесконечной ширины.
3. Протон с энергией $E=1$ МэВ изменил при прохождении бесконечно широкого потенциального барьера ($U \ll E$) длину волны де Бройля λ на 1%. Определить высоту потенциального барьера U .
4. На пути электрона с длиной волны де Бройля $\lambda_1=0,1$ нм находится бесконечно широкий потенциальный барьер высотой $U=120$ эВ. Определить длину волны де Бройля λ_2 после прохождения барьера.
5. Электрон с энергией $E=100$ эВ падает на бесконечно широкий потенциальный барьер высотой $U=64$ эВ. Определить вероятность того, что электрон отразится от барьера.
6. Электрон с энергией $E=25$ эВ, двигаясь в положительном направлении оси x , встречает на своем пути потенциальный барьер высотой $U=9$ эВ бесконечной ширины. Определить коэффициент преломления n волн де Бройля на границе раздела.
7. Определить коэффициент преломления n волн де Бройля для протона, движущегося в отрицательном направлении оси x , на границе бесконечно широкого потенциального барьера высотой $U=9$ эВ. Кинетическая энергия протона равна 16 эВ.
8. Вывести формулу, связывающую коэффициент преломления n волн де Бройля на границе низкого бесконечно широкого потенциального барьера и коэффициент отражения R от него.
9. Вывести формулу, связывающую коэффициент прохождения D частиц через низкий, бесконечно широкий потенциальный барьер и коэффициент преломления n волн де Бройля.
10. Коэффициент отражения R протона от низкого потенциального барьера бесконечной ширины равен $2,5 \cdot 10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота барьера и от энергии E падающих электронов.
11. При каком отношении высоты U низкого потенциального барьера бесконечной ширины и энергии ϵ электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения $R = 0.5$?
12. Вычислить коэффициент прохождения электронов с энергией $E=100$ эВ через потенциальный барьер высотой $U=99,75$ эВ бесконечной ширины.
13. Электрон движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути высокий потенциальный барьер бесконечной ширины. Найти эффективную глубину проникновения электрона за барьер, если $U - E=1$ эВ.
14. Частица массой m_0 имеющая энергию $E > 0$, движется слева направо в потенциальном поле вида $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > a, \\ -U_0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$ Найти коэффициент прохождения D и отражения R . Используя полученные результаты, определить:
 - энергию E , при которой частица будет беспрепятственно проходить через яму; установить для этого случая связь между шириной ямы a и длиной волны де Бройля λ , внутри ямы.
 - при заданных значениях E и U_0 ширину ямы a , при которой коэффициент отражения R максимален.
15. Частицы массы m каждая рассеиваются на прямоугольных симметричных потенциальных барьерах:
 - $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > a, \\ U_0, & 0 \leq x \leq a; \end{cases}$
 - $U(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, x > a, \\ U_0, & -a \leq x \leq a. \end{cases}$

Определить коэффициенты отражения и прохождения частицы как функции энергии E . Исследовать следующие частные предельные случаи:

- $E \rightarrow \infty$ (фактически $E \gg U_0$);
 - случай барьера малой прозрачности $\frac{(U_0 - E)ma^2}{2\hbar^2} \gg 1$;
 - $E \rightarrow 0$ (фактически $E \ll \frac{ma^2U_0^2}{\hbar^2}$, $E \ll U_0$);
 - $\frac{ma^2U_0}{\hbar^2} \ll 1$ и $\frac{ma^2E}{\hbar^2} \ll 1$;
 - $E \approx U_0$.
16. Ширина d прямоугольного потенциального барьера равна 0,2 нм, разность энергий $U - E = 0,5$ эВ. Во сколько раз изменится вероятность прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в 10 раз?
 17. Электрон с энергией $E = 9$ эВ движется в положительном направлении оси x . При какой ширине d потенциального барьера коэффициент прохождения $D = 0,1$, если высота барьера $U = 10$ эВ.
 18. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 15$ кВ. Во сколько раз отличается коэффициент прохождения D_e для электрона и D_p для протона, если высота барьера $U = 20$ кэВ, а ширина $d = 0,1$ нм?
 19. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной $d = 0,5$ нм. Высота U барьера больше энергии E электрона на 1%. Вычислить коэффициент прохождения D , если энергия электрона 100 эВ.
 20. Частицы массы m каждая рассеиваются на δ -образных потенциальных барьерах:
 - $U(x) = \alpha\delta(x)$, $\alpha > 0$,
 - $U(x) = \alpha\delta(x - a)$, $\alpha > 0$.

Найти коэффициенты отражения и прохождения как функции энергии частиц.

21. Частицы массы m каждая рассеиваются на системе из двух одинаковых δ -образных потенциальных барьеров $U(x) = \Omega(\delta(x) + \delta(x - a))$. При каких значениях энергии частиц данная система будет прозрачной для них?
22. Вычислить коэффициент прохождения барьера $U(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, x > a, \\ \frac{U_0}{a}x + U_0, & -a \leq x \leq 0, \\ -\frac{U_0}{a}x + U_0, & 0 \leq x \leq a \end{cases}$ для частицы массой m_0 при энергии $E < U_0$.
23. Для частицы массой m_0 и энергией $E < U_0$ найти коэффициент прохождения барьера, заданного потенциальной кривой $U(x) = U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

9 Вариационный метод Ритца

1. Получить приближенное значение энергии основного состояния частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, используя в качестве пробной волновые функции:
 - $\Psi(x) = Ax(x - a)$;
 - $\Psi(x) = Bx \left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)$;
 - $\Psi(x) = C \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$;
 - $\Psi(x) = D \left(\frac{a}{2} - \left|x - \frac{a}{2}\right|\right)$.

Сравнить с точным значением.

2. Определить методом Ритца энергию гармонического осциллятора в основном состоянии с пробной функцией вида:

- $\Psi(x) = Bxe^{-\beta x^2};$
- $\Psi(x) = Ae^{-\alpha x^2};$
- $\Psi(x) = \frac{A}{1 + \frac{x^2}{a^2}};$
- $\Psi(x) = \frac{B}{(1 + \frac{x^2}{a^2})^2}.$

3. Одномерный линейный гармонический осциллятор с массой μ и частотой ω находится в основном состоянии. Вариационным методом получить приближенное значение энергии осциллятора. Пробную функцию выбрать в виде $\Psi(x) = Ae^{-\alpha|x|}$, где α — вариационный параметр Ритца. Сравните ее с точным значением.
4. Одномерный линейный гармонический осциллятор с массой μ и частотой ω находится в первом возбужденном состоянии. Вариационным методом получить приближенное значение энергии осциллятора. Пробную функцию выбрать в виде $\Psi(x) = Axe^{-\alpha|x|}$, где α — вариационный параметр Ритца. Сравните ее с точным значением.
5. Движение частицы массы μ , находящейся в однородном поле тяготения, ограничено снизу абсолютно упругой горизонтальной пластиной. Вариационным методом получить приближенное значение энергии основного состояния частицы. Пробную функцию выбрать в следующем виде:

- $\Psi(z, \alpha) = Aze^{-\alpha z};$
- $\Psi(z, \alpha) = Bze^{-\alpha z/2},$

где α — вариационный параметр. Ось Oz направлена вертикально вверх. Ускорение свободного падения g . Какой вид должна иметь пробная функция, чтобы найти энергию первого возбужденного уровня? второго возбужденного уровня?

6. Для частицы в поле $U(x) = -\alpha\delta(x)$ определить вариационным методом энергию основного состояния, используя в качестве пробных функции вида:

- $\Psi(x) = \frac{A}{1 + \frac{x^2}{a^2}};$
- $\Psi(x) = \frac{B}{(1 + \frac{x^2}{a^2})^2}.$

7. Для частицы, находящейся в поле вида $U(x) = \begin{cases} kx, k > 0, & x > 0, \\ \infty, & x < 0, \end{cases}$ найти энергию основного состояния вариационным методом, используя пробные функции вида $x > 0$:

- $\Psi(x) = Axe^{-\alpha x};$
- $\Psi(x) = Bxe^{-\alpha x^2/2}.$

α — вариационный параметр.

8. Вычислить вариационным методом энергию основного состояния атома водорода. Пробную функцию выбрать в виде $\Psi(x) = Ae^{-\beta r}$ с вариационным параметром $\beta > 0$.
9. Вычислить вариационным методом энергию первого возбужденного состояния $2s$ атома водорода. Пробную функцию выбрать в двухпараметрическом виде с вариационными параметрами $\Psi(x) = B \left(1 + \gamma \frac{Zr}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{\alpha r}{a_0}\right)$ ($\alpha > 0$ и $\gamma < 0$).

10 Гармонический осциллятор

1. Вычислить коммутатор $[\hat{H}, (\hat{a}^+)^n]$, где $\hat{H}$, $\hat{a}^+$ — гамильтониан и оператор рождения кванта энергии ГО.
2. Вычислить коммутатор $[\hat{H}, (\hat{a}^-)^n]$, где $\hat{H}$, $\hat{a}^-$ — гамильтониан и оператор уничтожения кванта энергии ГО.
3. Показать, что гамильтониан ГО может быть представлен в виде $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^+ + \frac{1}{2} \right)$.
4. Вычислить среднюю потенциальную и среднюю кинетическую энергии ГО.
5. Проверить соотношение неопределенностей для координаты и импульса в случае с одномерным линейным гармоническим осциллятором.
6. Исходя из соотношения неопределенностей, определить энергию основного состояния ГО.
7. Найти волновую функцию основного состояния ГО $\left(E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \right)$.
8. Исходя из того, что $\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$, найти волновую функцию первого возбужденного состояния ГО.
9. Линейный одномерный гармонический осциллятор приведен в основное состояние. Найти вероятность его обнаружения в классически доступной области.
10. Найдите энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний частицы в поле $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & x > 0. \end{cases}$
11. Волновая функция осциллятора в момент $t = 0$ имеет вид $\Phi(x, 0) = \frac{\Phi_0(x) + 2i\Phi_1(x)}{\sqrt{5}}$, где $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$ — нормированные волновые функции стационарных состояний осциллятора. Убедитесь, что $\Phi(x, 0)$ нормирована на единицу. Найдите $\Phi(x, t > 0)$. Вычислите среднюю энергию осциллятора. Найдите вероятности $\omega(E_0)$, $\omega(E_1)$ того, что осциллятор имеет энергию E_0 , E_1 . Каково среднее значение координаты осциллятора $\bar{x}(t)$?
12. Найдите $|\Phi(x, t > 0)|^2$, если волновая функция гармонического осциллятора в момент $t = 0$ имеет вид $\Phi(x, 0) = \exp\left(-\frac{m\omega(x - x_0)^2}{2\hbar}\right)$.
13. Масса осциллятора m , частота ω , заряд e . На осциллятор действует постоянное однородное электрическое поле напряженности ε , направленное вдоль оси Ox . Найти энергии стационарных состояний и соответствующие им волновые функции.
14. Проквантовать движение ГО исходя из правила Бора-Зоммерфельда.
15. Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы массой m , движущейся в плоскости xy в поле $U(x, y) = \frac{1}{2}m(\omega_X^2x^2 + \omega_Y^2y^2)$ в случае, когда отношение ω_X/ω_Y не является рациональным числом. Рассмотреть отдельно случай когда ω_X/ω_Y — рациональное число, в частности случай кругового осциллятора: $\omega_X = \omega_Y = \omega$.
16. Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы массой m , движущейся в плоскости xy в поле $U(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$, $|\alpha| < m\omega^2$.

17. Две частицы массами m_1 и m_2 , способные совершать одномерное движение, соединены пружиной жесткости κ . Найти энергии стационарных состояний такой системы и соответствующие им волновые функции.

11 Угловой момент

1. Найти явный вид операторов $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$, $\hat{M}_z$, $\hat{M}_\pm = \hat{M}_x \pm i\hat{M}_y$, $\hat{M}^2$ в сферической системе координат.
2. Найти с.ф. и с.з. оператора $\hat{M}_z$.
3. Найти с.з. оператора $\hat{M}^2$.
4. Записать оператор кинетической энергии в сферической системе координат.
5. В состоянии Ψ_{lm} с определенным моментом l и его проекции m на z найти $\overline{l_x^2}$, $\overline{l_y^2}$.
6. В состоянии Ψ_{lm} с определенным моментом l и его проекции m на z найти среднее значение и среднюю флуктуацию проекции момента на ось $\tilde{z}$, составляющей угол α с осью z .
7. В состоянии частицы, характеризующемся угловой зависимостью волновой функции вида $\Psi = A \cos \phi$, $\Psi = A \cos^2 \phi$, $\Psi = Ae^{2i\phi}$ (ϕ - азимутальный угол сферической системы координат), найти вероятности различных значений проекции момента m на ось z .
8. Частица находится в состоянии с моментом $l = 1$ и его проекцией m ($m = \pm 1$) на ось z . Найти вероятности $\omega(m', m)$ различных значений проекции момента m' на ось z' , составляющей угол α с осью z .
9. Имеются две слабо взаимодействующие системы 1 и 2, состояния которых характеризуются квантовыми числами l_1 и l_2 момента и проекции его на ось z m_1 и m_2 :
 - (a) $l_1, m_1 = l_1, l_2, m_2 = l_2 - 1$;
 - (b) $l_1 = 1, m_1 = 0, l_2 = 1, m_2 = 0$;
 - (c) $l_1 = 2, m_1 = 1, l_2 = 2, m_2 = 1$;
 - (d) $l_1 = 1, m_1 = 1, l_2 = 1, m_2 = -1$.

Вычислить вероятности различных значений суммарного момента l .

10. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии плоского ротатора с моментом инерции I . Какова кратность вырождения уровней?
11. Найти энергии стационарных состояний (энергетический спектр) и соответствующие им волновые функции для пространственного ротатора с моментом инерции I .
12. Состояние пространственного ротатора описывается волновой функцией вида $\Psi = A \cos^2 \theta$, $\Psi = A \cos^3 \theta$, $\Psi = B e^{2i\varphi}$. Найти функции распределения ротатора по энергии, квадрату момента и его проекции на ось z , а также средние значения этих величин.
13. Угловая часть волновой функции частицы имеет вид $\Psi = A \cos \theta e^{2i\varphi}$. Какова вероятность значения $l = 1$ момента импульса частицы в этом состоянии?
14. Частица массой μ совершает свободное движение с определенным значением квадрата орбитального момента. Найти ненормированные волновые функции стационарных состояний с энергией E .
15. По заданной волновой функции найти искомую и отнормировать ее:
 - (a) $\Psi_{l=2,m=0} = C(3 \cos^2 \theta - 1)$, $\Psi_{l=2,m=1} - ?$
 - (b) $\Psi_{l=2,m=0} = C(3 \cos^2 \theta - 1)$, $\Psi_{l=2,m=-1} - ?$
 - (c) $\Psi_{l=2,m=1} = C e^{i\phi} \cos \theta \sin \theta$, $\Psi_{l=2,m=0} - ?$
 - (d) $\Psi_{l=2,m=-1} = C e^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta$, $\Psi_{l=2,m=0} - ?$
 - (e) $\Psi_{l=2,m=2} = C e^{2i\phi} \sin^2 \theta$, $\Psi_{l=2,m=1} - ?$
 - (f) $\Psi_{l=2,m=-2} = C e^{-2i\phi} \sin^2 \theta$, $\Psi_{l=2,m=-1} - ?$

- (g) $\Psi_{l=3,m=0} = C(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$, $\Psi_{l=3,m=1} - ?$
 (h) $\Psi_{l=3,m=0} = C(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$, $\Psi_{l=3,m=-1} - ?$
 (i) $\Psi_{l=3,m=1} = Ce^{i\phi}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$, $\Psi_{l=3,m=2} - ?$
 (j) $\Psi_{l=3,m=1} = Ce^{i\phi}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$, $\Psi_{l=3,m=0} - ?$
 (k) $\Psi_{l=3,m=-1} = Ce^{-i\phi}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$, $\Psi_{l=3,m=0} - ?$
 (l) $\Psi_{l=3,m=-1} = Ce^{-i\phi}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$, $\Psi_{l=3,m=-2} - ?$
 (m) $\Psi_{l=3,m=2} = Ce^{2i\phi} \sin^2 \theta \cos \theta$, $\Psi_{l=3,m=1} - ?$
 (n) $\Psi_{l=3,m=-2} = Ce^{-2i\phi} \sin^2 \theta \cos \theta$, $\Psi_{l=3,m=-1} - ?$
 (o) $\Psi_{l=3,m=3} = Ce^{3i\phi} \sin^3 \theta$, $\Psi_{l=3,m=2} - ?$
 (p) $\Psi_{l=3,m=-3} = Ce^{-3i\phi} \sin^3 \theta$, $\Psi_{l=3,m=-2} - ?$
16. Найти квантовые числа состояния с волновыми функциями $\hat{M}_+ \hat{M}_+ \hat{M}_+ \Psi_{lm}$, $\hat{M}_+ \hat{M}_- \Psi_{lm}$, $\hat{M}_+ \hat{M}_+ \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_+ \hat{M}_- \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_z \hat{M}_+ \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_+ \hat{M}_z \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_+ \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_- \Psi_{lm}$, $\hat{M}_+ \hat{M}_+ \hat{M}_- \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_- \hat{M}_+ \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_- \hat{M}_- \Psi_{lm}$, $\hat{M}_- \hat{M}_+ \hat{M}_+ \Psi_{lm}$, $\hat{M}_+ \hat{M}_- \hat{M}_- \Psi_{lm}$, $\hat{M}_+ \hat{M}_- \hat{M}_+ \Psi_{lm}$. При каких значениях l и m эти волновые функции равны нулю?
17. Определить уровни энергии для движения частицы массы μ с моментом $l = 0$ в сферической прямоугольной потенциальной яме конечной глубины $U(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a; \\ U_0, & r > a \end{cases}$ При какой минимальной глубине в яме присутствует лишь один уровень?
18. Найти энергии стационарных состояний и соответствующие им волновые функции для сферического осциллятора с массой μ и частотой ω . Решение провести в сферической системе координат.
19. Найдите энергетические уровни дискретного спектра частицы в двумерной потенциальной яме $U(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho > a; \\ -U_0, & \rho < a, \end{cases}$ в случае, когда проекция момента импульса частицы на ось, перпендикулярную плоскости движения, равна нулю. Специально рассмотреть случай «мелкой» ямы ($\frac{\mu a^2 U_0}{\hbar^2} \ll 1$, μ — масса частицы); сравнить с одномерным движением.

12 Водородоподобный атом

1. Вычислить значение квантовых чисел n , n_r , l и m в состоянии $3s$, $3p$, $3d$, $4s$, $4p$, $4d$, $4f$ атома водорода.
2. Получить явный вид волновой функции основного состояния водородоподобного атома и показать, что она нормирована на единицу. Выписать полную волновую функцию $1s$ -состояния.
3. Найти наивероятнейшее удаление электрона в $1s$ -состоянии от ядра с зарядом Ze .
4. Найти явный вид полных волновых функций состояний со значением главного квантового числа $n = 2$. Показать, что эти функции нормированы на единицу.
5. Непосредственным расчетом показать ортогональность волновых функций для $1s$ - и $2s$ -состояний водородоподобного атома.
6. Вычислить среднее значение r^{-1} в основном состоянии водородоподобного атома.
7. Чему равны l и m в состояниях:
 - $\Psi = A(r) \cos \theta$;
 - $\Psi = A(r) \sin \theta e^{\pm i\phi}$;
 - $\Psi = A(r) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$;
 - $\Psi = A(r) \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$;
 - $\Psi = A(r) \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$;

- $\Psi = A(r) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right).$

8. Построить график радиальной плотности вероятности в состояниях $\left(a = \frac{\hbar^2}{me^2} \right)$:

- $\Psi_{1s} = Ae^{-r/a};$
- $\Psi_{2s} = A r e^{-r/2a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \right);$
- $\Psi_{2p} = A r^2 e^{-r/2a} \cos \theta.$

9. Чему равна энергия атома водорода в состояниях $\left(a = \frac{\hbar^2}{me^2} \right)$:

- $\Psi_{1s} = Ae^{-r/a};$
- $\Psi_{2s} = A r e^{-r/2a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \right);$
- $\Psi_{2p} = A r^2 e^{-r/2a} \cos \theta.$

- Найти уровни энергии частицы массы μ в сферической бесконечно глубокой потенциальной яме радиуса a .
- Найти $\cos \theta$ и $\cos^2 \theta$ в s -состоянии пространственного ротатора.
- Найти $\cos^2 \theta$ в p -состоянии пространственного ротатора с $m = 0, \pm 1$.
- Показать ортогональность водородных функций Ψ_{200} и Ψ_{210} , Ψ_{100} и Ψ_{210} . Убедиться в неортогональности $R_{20}(r)$ и $R_{21}(r)$, $R_{10}(r)$ и $R_{21}(r)$.
- Найти среднее значение r^n в $1s$ -состоянии водородоподобного атома ($n > -2$).
- Найти среднее значение r^n в $2s$ -состоянии водородоподобного атома ($n > -2$).
- Найти среднее значение r^n в $2p$ -состоянии водородоподобного атома ($n > -4$).
- Найти средние значения $\vec{p}^2$ и r^{-1} в произвольном стационарном состоянии водородоподобного атома с главным квантовым числом n .
- Найти дискретный спектр для электрона в поле $U(z) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{\alpha}{r^2}$.
- Найти средний потенциал электростатического поля, создаваемого водородоподобным ионом в $1s$ -состоянии, как функцию расстояния до точечного ядра с зарядом Z . В чем состоит принципиальное отличие случая $Z = 1$ от $Z > 1$?
- Найдите $\vec{r}, \vec{r}^n$ для электрона в основном состоянии атома водорода.
- Найдите эффективный (средний) электростатический потенциал, создаваемый невозбужденным атомом водорода. Получите асимптотику потенциала при больших и малых расстояниях от ядра атома.
- Найдите распределение вероятностей различных значений импульса электрона в основном состоянии атома водорода.
- Пусть n — номер уровня частицы в кулоновском потенциале. Каково максимальное значение момента импульса частицы в этом состоянии? Какова кратность вырождения n -ого уровня? Какова кратность вырождения этого уровня при условии, что он имеет определенную четность?
- Найдите, при каком условии появляется s -состояние дискретного спектра в сферической яме $U(r) = \begin{cases} 0, & r > a; \\ -U_0, & r < a. \end{cases}$ Сравните полученный результат с результатами в случае одномерного и двумерного движения.

25. Найдите уровни энергии и нормированные волновые функции стационарных состояний сферического осциллятора, т.е. частицы, движущейся в поле $U(r) = \frac{kr^2}{2}$ ($k > 0$). Решите уравнение Шредингера двумя способами — в декартовой и сферической системах координат.

13 Квазиклассическое приближение

1. Используя правила квантования Бора-Зоммерфельда вычислить допустимые уровни энергии частицы массой m в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a .
2. Используя правила квантования Бора-Зоммерфельда проквантовать движение одномерного гармонического осциллятора (частица массы m , которая движется в потенциальном поле $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$).
3. Используя правила квантования Бора-Зоммерфельда найти спектр плоского ротатора (частицы массой m , свободно вращающейся под действием центральной силы по окружности радиуса r).
4. Найти с помощью правил квантования Бора-Зоммерфельда спектр энергий атома водорода.
5. Используя правила квантования Бора-Зоммерфельда найти уровни энергии электрона, который движется по круговой орбите в водородоподобном атоме (заряд ядра Ze).
6. Используя правила квантования Бора-Зоммерфельда найти спектр энергии и допустимые высоты частицы массы m , вертикально падающей на горизонтальную пластинку и упруго от нее отражающейся.
7. Частица массы m вертикально падает в поле тяжести на горизонтальную пластину и упруго от нее отражается. Найти с помощью правил квантования Бора-Зоммерфельда спектр энергий такой частицы.
8. Найдите в квазиклассическом приближении уровни энергии частицы, находящейся в одномерном потенциале $U(x) = -\frac{A}{|x|}$, где $A > 0$.
9. Найдите в квазиклассическом приближении дискретный спектр частицы, находящейся в потенциале $U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2(x/a)}$, $U_0 > 0$.
10. Получите правило квантования энергетических уровней и найдите соответствующие им квазиклассические волновые функции в случае потенциальной ямы вида $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0; \\ \tilde{U}_x, & x > 0, \end{cases}$ где $\tilde{U}_x$ — функция с положительной первой производной.
11. Электрон движется в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}$, параллельном оси z . Из-за бесконечно высокого потенциального барьера в плоскости $y = 0$ движение электрона возможно лишь в полупространстве $y > 0$. Найдите в квазиклассическом приближении энергетические уровни электрона (спин не учитывайте). Как движется классический электрон в системе, описанной в задаче?
12. Найдите в квазиклассическом приближении энергетические уровни электрона, который находится в постоянном неоднородном магнитном поле $\vec{H}(x) = \begin{cases} H_1, & x > 0; \\ H_2, & x < 0, \end{cases}$ параллельном оси z . Считайте для определенности, что $H_1 < H_2$. Спин не учитывайте. Опишите движение классического электрона в поле $\vec{H}(x)$.

13. Потенциал $U(x)$ непрерывен в точке $x = 0$, но его производная в этой точке испытывает конечный скачок. При каком условии обычные формулы приближения ВКБ для волновой функции остаются справедливыми? Для определенности считайте, что вблизи точки $x = 0$ $U(x) = Fx\theta(x)$, где $F > 0$, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
14. Вычислите в квазиклассическом приближении коэффициент прозрачности параболического барьера $U(x) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), & |x| < a; \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$ где $U_0 > 0$. Укажите условия применимости полученного результата.
15. Оцените в квазиклассическом приближении коэффициент прозрачности барьера $U(x) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right), & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где $U_0 > 0$. Найдите не только экспоненциальный, но и предэкспоненциальный множитель, входящий в коэффициент прозрачности.
16. Решите предыдущую задачу для потенциального барьера $U(x) = \begin{cases} U_0 e^{-x/a}, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где $U_0 > 0$.

14 Стационарная теория возмущений

1. Для частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a ($0 < x < a$), найти в первом и втором порядках теории возмущений смещение энергетических уровней под действием возмущения:
- $V(x) = \frac{V_0}{a}(a - |2x - a|)$;
 - $V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2, \\ 0, & a/2 < x < a; \end{cases}$
 - $V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a/2, \\ V_0, & a/2 < x < a; \end{cases}$
 - $V(x) = V_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$;
 - $V(x) = V_0 \left(1 - \left|\frac{2x}{a} - 1\right|\right)$;
 - $V(x) = V_0 \frac{x}{a}$;
 - $V(x) = V_0 \cos^2 \frac{\pi x}{a}$;
 - $V(x) = V_0 \sin^2 \frac{\pi x}{a}$;
 - $V(x) = V_0 \sin \frac{3\pi x}{a}$.
2. Найти в первом порядке теории возмущений смещение энергетических уровней ангармонического осциллятора – частицы массой m , которая движется в потенциальном поле $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \varepsilon_1 x^3 + \varepsilon_2 x^4$.
3. Жесткий плоский ротатор расположен в электрическом поле $\vec{E}$, направленном вдоль оси x . Масса частицы μ , заряд e , расстояние от оси вращения OZ равно a . Найти в первом и втором порядках теории возмущений смещение энергетических уровней ротатора.
4. На зараженный одномерный гармонический осциллятор (масса частицы μ , заряд e) наложено слабое электрическое поле $\vec{E}$ вдоль оси колебаний. Вычислите в первых двух порядках теории возмущений сдвиг энергетических уровней осциллятора. Найдите волновые функции первого приближения. Укажите условия применимости теории возмущений.

5. Покажите, что поправка первого порядка $E_n^{(1)}$ к энергетическим уровням частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме ширины a не зависит от номера уровня n при больших значениях n для достаточно произвольного возмущения $V(x)$.
6. На заряженную частицу, находящуюся в одномерном потенциале $U(x) = -\alpha\delta(x)$, $\alpha > 0$, накладывается слабое однородное электрическое поле ε , направленное вдоль оси x . Найдите сдвиг энергетического уровня основного состояния и поляризуемость частицы в этом состоянии (поляризуемостью называется величина $\beta = -\frac{\partial^2 E_0}{\partial \varepsilon^2}$ при $\varepsilon = 0$, где E_0 — энергия основного состояния частицы при наличии электрического поля ε).
7. Частица находится внутри непроницаемого эллипсоида вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$, $|a-b| \ll a$. Найдите в первом порядке теории возмущений сдвиг основного энергетического уровня по отношению к основному уровню в сферической яме такого же объема.
8. Найдите в первом порядке теории возмущений расщепление а) первого, б) второго возбужденного уровня плоского гармонического осциллятора (т.е. частицы в потенциальном поле $U(x, y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$, где m — масса частицы, ω — частота осциллятора) под действием возмущения $V = \alpha xy$. Укажите «правильные» волновые функции нулевого приближения. Каковы условия применимости теории возмущений?
9. Как изменится энергия первого возбужденного состояния атома водорода, если рассматривать протон не как точку, а как равномерно заряженный шар радиуса $b = 5 \cdot 10^{-13}$ см?
10. На расстоянии b от центра колебаний плоского гармонического осциллятора с зарядом q , массой m и частотой ω поместили идеальную металлическую плоскость, перпендикулярную плоскости колебаний xy . Считая расстояние b большим, найдите уровни энергии осциллятора в низшем исчезающем приближении по $1/b$. Укажите условия применимости полученного решения.
11. Ось вращения плоского ротатора с моментом инерции I находится на расстоянии b от идеальной металлической плоскости. На ротаторе закреплен точечный заряд q , удаленный от оси вращения на расстояние $a \ll b$. Найдите уровни энергии ротатора в низшем исчезающем приближении по параметру a/b .

15 Спин частицы

1. Найти волновую функцию в состоянии $s = 1/2$, $s_z = -1/2$.
2. Найти волновую функцию в состоянии $s = 1/2$, $s_z = 1/2$.
3. Состояния с каким спином описывает спинорная волновая функция Ψ_α ?
4. Доказать, что операторы $\hat{S}_z$ и $\hat{S}^2$ коммутируют друг с другом ($s = 1/2$).
5. Найти спинорные матрицы для $s = 1/2$.
6. Выразить оператор $\hat{N} = \hat{p} \times \hat{r}$ через оператор углового момента.
7. Найти собственную функцию и собственное значение оператора $\hat{S}_x$ для $s = 1/2$.
8. Найти собственную функцию и собственное значение оператора $\hat{S}_y$ для $s = 1/2$.
9. Вычислить коммутатор $[\hat{S}_i, \hat{S}_j]$ для $s = 1/2$.
10. Найти матрицу оператора $\hat{M}_z$ для $l = 3$.
11. Найти матрицу оператора $\hat{M}_z$ для $l = 4$.

12. Для $s = 1/2$ найти вид операторов $\hat{S}_+$, $\hat{S}_-$ и рассмотреть их действие на собственные функции оператора $\hat{S}_z$.
13. Для $s = 1/2$ найти вид операторов $\hat{S}_+$, $\hat{S}_-$ и выяснить их смысл.
14. Найти квадраты компонент оператора спина $s = 1/2$. Объяснить, почему они равны.

Содержание

1	Экспериментальные обоснования квантовой механики	2
2	Операторы в квантовой механике	3
3	Соотношения неопределенностей Гейзенберга	5
4	Волновая функция микрочастицы и ее физический смысл	7
5	Стационарное уравнение Шредингера	8
6	Дифференцирование операторов и интегралы движения	10
7	Потенциальные ямы	11
8	Потенциальные барьеры	13
9	Вариационный метод Ритца	15
10	Гармонический осциллятор	17
11	Угловой момент	18
12	Водородоподобный атом	19
13	Квазиклассическое приближение	21
14	Стационарная теория возмущений	22
15	Спин частицы	23