

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4**  
**ИЗУЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАДИОАКТИВНОГО**  
**РАСПАДА ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ЯДЕРНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ**  
**(детектор – счетчик Гейгера-Мюллера).**

**Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ**

**1. Цели и задачи работы.**

Ознакомиться со статистическими закономерностями вероятностных процессов, к которым относится явление радиоактивного превращения атомных ядер. Экспериментально пронаблюдать распределение числа частиц ядерных излучений (гамма-квантов), зарегистрированных детектором за определенный промежуток времени, и подтвердить расчетом соответствие экспериментального распределения, распределению Пуассона.

Перед выполнением работы для ознакомления с принципами регистрации излучений с помощью счетчика Гейгера-Мюллера рекомендуется еще раз прочитать «Введение в физпрактикум», уделив дополнительное внимание пунктам: 2.2, 3.2, 4.2, 4.3, 4.4, а также ознакомиться с инструкцией к лабораторной работе №1 «Газоразрядный счетчик Гейгера-Мюллера», пункты 2, 3, 4.

**2. Вступление.**

Измерение любой физической величины, как правило, сопровождается погрешностью (ошибкой измерения), которая есть разность между измеренным значением исследуемой величины и ее *неизвестным*, но вполне определенным для величин классической физики, истинным значением (например, размеры тела, масса тела, временной интервал какого-либо явления, температура среды и т.п.). Величина погрешности характеризует точность измерения (чем меньше погрешность, тем выше точность, что очевидно). При оценке достоверности экспериментальных результатов измерений различают три принципиально разные группы *погрешностей измерения: систематические* (или методические), *инструментальные* (или аппаратные) и *случайные* (или статистические). Возможны также *промахи или грубые погрешности*, возникающие вследствие неисправности измерительных приборов или ошибок экспериментатора, сделанных по невнимательности или неаккуратности. Естественным является стремление избегать промахов, но если стало понятно, что они все-таки допущены, соответствующие им результаты измерений необходимо отбросить и, при возможности, повторить эксперимент в этой области значений измеряемых параметров.

Систематические погрешности, как правило, связаны с несоответствием методики эксперимента и применяемой для его интерпретации моделью исследуемого физического явления. Например, в лаб. работах №6 и №7 это – неполное соответствие степени коллимации пучка гамма- и бета- излучения с моделью экспоненциального ослабления его интенсивности при прохождении слоя поглотителя-рассеивателя. К систематической погрешности при измерении интенсивности ядерных излучений приводит, например, конечное время разрешения детектора, если его не учитывать (см. лаб. работу №1). Влияние на результат эксперимента систематических погрешностей может быть уменьшено тщательным обдумыванием методики эксперимента, использованием более совершенных измерительных приспособлений, усовершенствованием модели явления, какими-то дополнительными экспериментами и расчетами и т.п. [1], [2].

Инструментальные погрешности обусловлены несовершенством применяемых измерительных приборов, конечной величиной их чувствительности по отношению к измеряемому параметру физического явления, неверной их калибровкой (поверкой), влиянием температуры, несоответствующего электропитания, а также ошибками экспериментатора при считывании показаний прибора, например, ошибка на параллакс при определении показаний стрелочного прибора (направление луча зрения не перпендикулярно шкале прибора) и т.п. Инструментальные погрешности, как правило, можно практически исключить или существенно уменьшить (предел – половина минимального деления шкалы прибора, так как шкала изготавливается таким образом, что более точное глазомерное определение доли деления не имеет смысла в силу перечисленных выше свойств инструментальных погрешностей).

Случайные погрешности могут быть обусловлены отсутствием идеальной воспроизводимости условий эксперимента (например, некоторое влияние трения на показания любого стрелочного прибора, пружинного динамометра, конвекция воздуха в помещении, колебания температуры, колебания напряжения сети или пульсации выпрямленного напряжения и т.п.). Как правило, такие погрешности невелики и их влияние может быть практически устранено многократным повторением эксперимента и усреднением его результатов. **Случайные погрешности также могут быть вызваны принципиально вероятностным характером исследуемого физического явления**, что свойственно микромиру из-за корпускулярно-волнового дуализма микроматерии. Именно к таким явлениям относится явление радиоактивности, как и другие квантово-механические явления [3].

Величина, представляющая собой результат опыта, является, как правило, случайной величиной, т.е. заранее непредсказуема и меняется от опыта к опыту. Случайная величина может быть дискретной или даже целочисленной (как в данной лаб. раб.), т.е. принимать определенный, конечный (в пределе бесконечный) набор фиксированных значений, или непрерывной, т.е. принимать произвольные значения. Например, результат бросания игральной кости – дискретная случайная величина, а результат измерения диаметра провода – непрерывная. Если бы опыт был проведен бесконечно большое число раз, (что нереально) мы бы получили **генеральную совокупность – полный бесконечный набор всех значений, которые может принимать случайная величина**. В реальных условиях опыт проводится конечное число раз и мы получаем **выборку конечного объема числа значений случайной величины. Генеральная совокупность – предельный случай выборки с бесконечно большим объёмом**.

Явление радиоактивности, открытое Беккерелем в 1896 г., заключается в самопроизвольном (спонтанном) превращении атомного ядра радиоактивного (нестабильного) изотопа, которое сопровождается вылетом частиц и квантов ядерных излучений:  $\alpha$ -частицы при  $\alpha$ -распаде,  $\beta$ -частицы (электрон или позитрон) при  $\beta$ -распаде,  $\gamma$ -кванты при переходах ядер из возбужденного состояния в менее возбужденное или основное состояние, а также осколки ядер в реакции самопроизвольного деления, протоны или нейтроны в других ядерных превращениях и т.п. Регистрация (детектирование) этих излучений и является свидетельством явления радиоактивности. Конечно, радиоактивное превращение ядер радиоактивного изотопа данного химического элемента можно зафиксировать и с помощью химического анализа по обнаружению нового, ранее отсутствовавшего в радиоактивном образце, химического элемента [4].

Судить о факте распада ядра можно лишь путём регистрации испускаемых в процессе этого распада частиц. Практически никогда не удаётся зарегистрировать все акты распада ядер источника, так как число зарегистрированных частиц обусловлено геометрическими условиями измерений, характеристиками источника, содержащего радиоактивные ядра, методом регистрации испускаемых частиц и параметрами детектора. Но при неизменности всех этих условий число зарегистрированных частиц пропорционально числу распадов и закон распределения числа срабатываний детектора (отсчётов) за фиксированный промежуток времени совпадает с законом распределения распадов.

Опыт показывает, что ни интенсивность (скорость) радиоактивного распада в данный момент времени, ни энергетический спектр соответствующего излучения ядер практически не зависят от различных воздействий на образец радиоактивного вещества: температура, давление, электромагнитные поля, фазовые переходы, различные добавки других радиоактивных или нерадиоактивных веществ в данный радиоактивный образец и т.п. Таким образом, взаимодействие данного атома радиоактивного изотопа с любыми другими атомами, обусловленное взаимодействием электронных оболочек атомов, экранирующих ядро, не влияет на радиоактивные превращения его ядра, требующие значительно больших энергий (влияние на энергетический спектр излучения заметно только в особом случае ядерного гамма-резонанса).

В отличие от макромира, в микромире флуктуации измеряемых величин связаны, как правило, с самой сутью явлений. Они отражают статистическую природу процессов происходящих в микромире и, поэтому, измеряемые величины флуктуируют от одного измерения к другому, а флуктуации не могут быть сделаны сколь угодно малыми. При измерении числа актов радиоактивного распада, происшедших за определенный промежуток

времени, *флуктуирует сама измеряемая дискретная величина*, а измерительный прибор (детектор, счетчик частиц) в первом приближении можно считать идеальным, неподверженным статистическому влиянию окружающих условий, а при не слишком большой интенсивности регистрации можно также пренебречь и систематической ошибкой, связанной с просчетами [5]. Несмотря на статистические флуктуации отдельных измерений, *эксперимент позволяет извлечь информацию о средних значениях изучаемых величин с любой заданной точностью, определяемой количеством измерений, т.е. длительностью эксперимента.*

Проведение достаточно большого количества измерений случайной величины позволяет установить, что результаты измерений отвечают определенным статистическим закономерностям, изучаемым в данной работе.

При выполнении работы необходимо обратить внимание на следующее:

- Результаты отдельных измерений отражают статистическую природу процессов происходящих в микромире. Поэтому они флуктуируют от одного измерения к другому.
- Несмотря на статистические флуктуации отдельных измерений, они, при достаточном их количестве, с любой заданной точностью позволяют извлечь информацию о средних значениях измеряемых величин.
- Результаты измерений подчиняются определенным статистическим закономерностям.

### **3. Закон радиоактивного распада и теория вероятностей.**

Закон радиоактивного распада открыт Фредериком Содди и Эрнестом Резерфордом экспериментальным путём и сформулирован в 1903 году. Современная формулировка закона:

$$dN/dt = -\lambda \cdot N \quad (1)$$

что означает, что число распадов  $dN$  за интервал времени  $dt$  в произвольном радиоактивном изотопе пропорционально числу  $N$  имеющихся в образце радиоактивных атомов (ядер) данного типа. Знак минус указывает на убыль числа радиоактивных ядер со временем. Величина  $A = |dN/dt| = \lambda \cdot N$  называется активностью источника (подробнее – см. лаб. раб. №3).

*Постоянная распада  $\lambda$ , определяющая скорость распада и имеющая размерность  $s^{-1}$ , характеризует вероятность радиоактивного распада и является характеристикой данного вида ядер (ядер данного изотопа).* Вероятность распада данного ядра в каждую следующую единицу времени не зависит от времени, прошедшего с начала эксперимента, и от количества ядер, оставшихся в образце. Фактически, скорость распада в эксперименте измеряется количеством зарегистрированных детектором и пересчетным прибором частиц распада в единицу (или определенную величину) времени, что и будет измеряться в данной лабораторной работе. *При небольшой величине  $\lambda$  и достаточно большой величине  $N$  измеряемая скорость распада будет практически постоянной (небольшие количества любого вещества содержат огромное количество атомов и уменьшением  $N$  можно пренебречь, особенно учитывая большие периоды полураспада применяемых в лабораторной работе радиоактивных источников, порядка нескольких десятков лет – сравните с временем выполнения лабораторной работы). Например, для радиоактивного источника  $Cs^{137}$ , применяемого в данных лабораторных работах,  $N \approx 10^{14}$  атомов (ядер), а период полураспада примерно 30 лет [6].* Аналогичная ситуация и для других радиоактивных источников данного лабораторного практикума.

Скорость распада определяется статистическим законом, который предсказывает, что из  $N_0$  атомов, существовавших в начальный момент времени ( $t = 0$ ) к моменту времени  $t$ , в результате спонтанного радиоактивного распада остается в среднем  $N = N(t)$  нераспавшихся атомов, где:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Выражение (2) закона радиоактивного распада следует из выражения (1), что очевидно [7].

Другой характеристикой изотопа, непосредственно связанной с постоянной распада  $\lambda$ , является *период полураспада  $T$  – время, по истечении которого остается половина первоначального количества расщепляющихся ядер.* Легко показать [8], что величины  $\lambda$  и  $T$  связаны следующим образом:

$$T = \ln 2 / \lambda \quad (3)$$

*Величина  $\tau = 1/\lambda$  – среднее время жизни данного радиоактивного ядра.*

Используя некоторые выводы теории вероятностей и математической статистики, можно показать, что приведенный выше закон радиоактивного распада выводится из следующих предположений, подчеркивающих случайный характер радиоактивного распада:

а) каждое ядро распадается независимо от остальных ядер радиоактивного источника и условий, в которых он находится, т.е. самопроизвольно, спонтанно;

б) вероятность того, что атом (ядро атома), «выживший» с момента времени  $t$ , распадается в интервале времени  $(t+\Delta t)$  не зависит от  $t$ , т.е. от предыдущей его «жизни».

**В соответствии с классическим определением, вероятностью  $P$  некоторого события называется отношение числа благоприятных исходов при реализации (наблюдении) этого события к общему числу равновероятных исходов.** Например, вероятность выпадения любой грани игрального кубика равна  $1/6$  [9]. Вероятность принимает численные значения от 0 (для невероятных событий) до 1 (для достоверных событий), т.е. всегда  $0 \leq P \leq 1$ .

**Эмпирическое (статистическое) определение вероятности данного события связано с относительной частотой наступления события (отношение числа благоприятных исходов к общему числу испытаний), исходя из того, что при достаточно большом (в пределе бесконечном) числе испытаний эта частота стремится к объективной величине возможности этого события, т.е. к его вероятности.**

Вероятность  $P_p$  распада любого ядра атома радиоактивного источника за **определенный промежуток времени** определяется как отношение числа успешных наблюдений этого явления (т.е. числа распадов) к общему числу равновероятных распадов, определяемых общим количеством радиоактивных атомов (ядер) этого источника, конечно, **при достаточно большом числе этих испытаний**. Соответственно противоположная вероятность  $P_{np}$  отсутствия распада («нераспада») определяется отношением количества нераспавшихся ядер за время наблюдения к общему количеству ядер источника. **Конечно,  $P_p + P_{np} = 1$ , что очевидно как общая вероятность достоверного события.**

Покажем, что справедливость закона радиоактивного распада (2) следует из свойств вероятностей величин  $P_p$  и  $P_{np}$ .

Как было сказано выше, скорость радиоактивных превращений не зависит от внешних условий, в которых находится радиоактивное вещество. Это обстоятельство однозначно указывает на то, что радиоактивный распад есть свойство самого ядра и зависит только от его внутреннего состояния. Распад ядра атома есть событие случайное, происходящее самопроизвольно, спонтанно.

Вероятность распада  $P_p$  отдельного атома радиоактивного элемента за промежуток  $\Delta t$  не зависит от условий, в которых атом находится в настоящее время или находился ранее. Эта величина для данного радиоактивного вещества, таким образом, не зависит от времени  $t$ , а при малых значениях  $\Delta t$ , вероятность  $P_p$  пропорциональна величине интервала  $\Delta t$  и скорости распада, т.е. постоянной  $\lambda$ :

$$P_p = \lambda \cdot \Delta t \quad (4)$$

Соответственно, вероятность «нераспада» отдельного атома за время  $\Delta t$ :

$$P_{np} = 1 - P_p = 1 - \lambda \cdot \Delta t \quad (5)$$

Вероятность того, что атом не распадается за два последовательных промежутка времени, т.е. в первый и во второй промежуток времени, равна:

$$P_{np\ 2\Delta t} = (1 - \lambda \cdot \Delta t)(1 - \lambda \cdot \Delta t) = (1 - \lambda \cdot \Delta t)^2 \quad (6)$$

т.к. эти два события («нераспад» в первый промежуток времени  $\Delta t$  и «нераспад» во второй промежуток времени  $\Delta t$ ) являются независимыми, а вероятность совмещения независимых событий равна произведению вероятностей каждого из этих событий. По индукции, вероятность того, что атом не распадается в течении  $n$  последовательных отрезков времени  $\Delta t$  равна:

$$P_{np\ n\Delta t} = (1 - \lambda \cdot \Delta t)^n \quad (7)$$

Если сумму всех последовательных  $n$  интервалов времени  $\Delta t$  обозначить через  $t$ , то  $\Delta t = t/n$ . Тогда полученная вероятность «нераспада» за время  $t$  запишется в виде:

$$P_{np\ n\Delta t} = P_t = (1 - \lambda \cdot t/n)^n \quad (8)$$

Это выражение будет тем точнее, чем больше наблюдений выполнено за время  $t$ . В пределе для достаточно большого числа  $n$ , фактически при  $n \rightarrow \infty$  получим вероятность «нераспада» атома за время  $t$ :

$$P_{\text{нр}t} = (1 - \lambda \cdot t/n)^n = e^{-\lambda t} \quad (9)$$

(использован второй замечательный предел математики:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + k/n)^n = e^k$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - k/n)^n = e^{-k}$ , где  $k$  – константа).

Теперь получаем окончательное выражение для вероятности того, что атом не распадается за конечное время  $t$ :

$$P_{\text{нр}t} = e^{-\lambda t} \quad (10)$$

Используя классическое определение вероятности «нераспада», как отношение числа благоприятных исходов  $N$  (т.е. «нераспадов») при реализации (достаточно многократном наблюдении за время  $t$  с нахождением среднего значения) этого события к общему числу равновероятных исходов (при одинаковых начальных условиях – число  $N_0$ ), имеем:  $P_{\text{нр}t} = e^{-\lambda t} = N(t)/N_0$ , т.е. **получаем искомый закон радиоактивного распада (2)**. Еще раз отметим, что величина  $N(t)$  имеют смысл наиболее вероятного количества оставшихся нераспавшимися ядер к моменту времени  $t$  от начала каждого отдельного эксперимента с  $N_0$  радиоактивных ядер.

**Конечно, число  $N_0$  радиоактивных ядер источника в процессе выполнения лабораторной работы изменяется (уменьшается), но столь незначительно, что этим изменением можно пренебречь (см. 2-й абзац этого параграфа).**

Таким образом, экспоненциальный закон радиоактивного распада может быть получен как следствие предположений о независимости вероятности распада атома в данный момент от времени жизни атома, а также о независимости друг от друга распадов отдельных атомов источника.

#### **4. Распределение Бернулли.**

В данной лабораторной работе радиоактивный распад рассматривается как случайный процесс по измерению числа распадов в фиксированный промежуток времени в образце сравнительно долгоживущего радиоактивного изотопа источника, содержащего достаточно большое количество радиоактивных ядер. **Факт распада ядра источника фиксируется по регистрации детектором гамма-кванта или бета-частицы, испускаемых ядром при распаде.** Самой распространенной вероятностной схемой, к которой сводится решение многих экспериментальных задач, является **схема повторения независимых испытаний в неизменных условиях, что и реализуется в данной лабораторной работе, так как  $N_0$  сравнительно велико и его можно считать практически неизменным, несмотря на распад ядер этого источника.** Если в серии таких испытаний нас интересует только одно событие – распад *одного* (любого) из ядер источника, которое в каждом отдельном испытании может произойти с вероятностью  $p$  и не произойти с вероятностью  $q = 1 - p$ , то приходим к так называемой **схеме Бернулли** (Яков Бернулли – швейцарский математик 17-го века).

**Рассмотрим измеряемую в данной лабораторной работе случайную величину, принимающую различные целочисленные значения  $m$ , равные числу зарегистрированных за определенное время наблюдения распадов ядер в серии из  $n$  экспериментов. Вероятность совместного появления числа  $m$  распадов, равная отдельно  $p^m$ , и  $N-m$  «нераспадов», равная отдельно  $q^{N-m}$ , в одном данном эксперименте пропорциональна произведению этих вероятностей [10]:**

$$p^m \cdot q^{N-m} \quad (11)$$

Еще раз подчеркнем, что  $N \approx N_0 = \text{Const}$ . Так как отдельные атомы между собой неразличимы, то для определения вероятности числа распадов в данном измерении необходимо учесть также число вариантов выборки  $m$  распадающихся ядер из общего количества  $N$  ядер, безразлично в каком порядке, т.е. число сочетаний из  $N$  элементов по  $m$ :

$$C_N^m = \frac{N!}{(m!)(N-m)!} \quad (12)$$

Окончательно, вероятность  $P_m$  того, что в данном измерении будет зарегистрировано  $m$  распадов, будет равна:

$$P_m = C_N^m \cdot p^m \cdot q^{N-m} = \frac{N!}{(m!)(N-m)!} \cdot p^m \cdot q^{N-m} \quad (13)$$

**Распределение случайной величины, задаваемое формулой (13) называется биномиальным. Свое название она получила, от того, что значения, вычисляемые по этой формуле, являются членами в разложении  $(a + b)^n$  по формуле бинома Ньютона:**

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m} \quad (14)$$

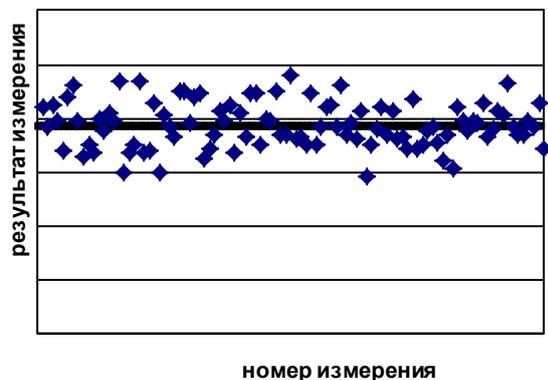
Если  $a = p$ ,  $b = q$ , то, поскольку сумма вероятностей  $p + q = 1$ , то и  $\sum_{m=0}^n C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = 1$ , что и

соответствует аксиоме теории вероятностей, согласно которой, вероятность достоверного события равна единице.

При расчетах вероятности  $P_m$  при вычислении факториалов для больших  $N$  и  $m$  можно пользоваться **формулой Стирлинга** (1730 г.) для факториалов целых чисел:  $k! \approx k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot k}$ , (например, при  $k = 10$  относительная погрешность вычислений не превышает 0.83%).

**Решить пример.** Монету подбрасывают пять раз подряд. Какова вероятность того, что при этом герб выпадет ровно три раза? Ответ 5/16 [11]. Экспериментальную (конечно приближенную в силу вероятностного процесса) проверку решения производить (при желании) вне аудитории, например, на подоконнике в холле или в другом месте.

Результаты проведенных измерений количества зарегистрированных детектором и пересчетным прибором частиц распада в единицу (или определенную величину) времени соответствуют виду, приведенному на рисунке, где жирная полоса проведена на уровне  $m_{cp.}$ .



Из рисунка видно, что распределение Бернулли (зависимость количества результатов с данным  $m_i$  от величины  $m_i$  в  $n$  экспериментах) имеет максимум вблизи  $m_{cp.}$ , где  $m_{cp.} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n m_i$  и

сравнительно быстро спадает при удалении от  $m_{cp.}$  в обе стороны. Вероятность появления малых отклонений больше вероятности больших отклонений от среднего. Вероятность появления случайных отклонений не зависит от их знака, т.е. статистические отклонения, равные по абсолютной величине, но противоположные по

знаку, встречаются одинаково часто. Вид «кривой» (график целочисленной функции представляется прямоугольниками – см. ниже) распределения Бернулли похож на вид кривой распределения Пуассона, о котором рассказано ниже. Отметим, что минимально возможное значение  $m_i$  равно нулю (в каком-то измерении вообще не зафиксирован распад ядер), а максимально возможное значение  $m_i$  равно  $N_0$  – все ядра радиоактивного источника распались в данном измерении, что практически невероятно.

Очевидно, что усредненная по  $n$  измерениям величина, характеризующая активность (интенсивность излучения) источника  $m_{cp.}$  (выборочное среднее) будет гораздо точнее характеризовать активность излучения источника, чем результаты отдельных измерений. Несмотря на то, что в среднем все результаты измерений концентрируются вблизи  $m_{cp.}$ , тем не менее, результаты отдельных измерений отличаются от  $m_{cp.}$  в ту и другую сторону, как это и следовало ожидать, учитывая случайный характер наблюдаемых событий.

**Предельное значение величины  $m_{cp.}$  при достаточно большом количестве (в принципе бесконечно),  $n$  измерений (испытаний) есть математическое ожидание  $\mu$  случайной величины  $m_i$ , равное, по определению, сумме произведений всех возможных значений этой случайной величины на вероятности  $p_i$  этих значений (формулировка справедлива для дискретных случайных величин), т.е.  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cdot p_i \approx \sum_{i=1}^n m_i \cdot p_i$ . Математическое ожидание**

используется в математическом формализме описания случайных процессов [12].

Если считать, что  $m_{cp.}$  наилучшая оценка величин  $m_i$ , то естественно рассмотреть разность  $\Delta m_i = m_i - m_{нд.}$ , характеризующую отклонение от среднего значения измеряемой величины. Очевидно, что среднее значение этого отклонения  $\Delta m_{i,cp.}$  тождественно равно нулю в силу определения самого  $m_{cp.}$  [13]. Поэтому в статистике используют другую величину, равную квадрату отклонения, усредненному по всевозможным значениям этой величины, которая называется **дисперсией** (лат.)  $D$ , где  $D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta m_i)^2$ . Часто дисперсию определяют формулой:

$$D = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta m_i)^2 \quad (\text{эта формула исключает проведение только одного измерения, при котором } D$$

не определено, а при больших  $n$  практически не отличается от предыдущей), поскольку в связи с конечным количеством экспериментов при небольших  $n$  вычисленное среднее значение  $m_{cp.}$  отличается от предельного (получаемого при  $n \rightarrow \infty$ ), и такая поправка дает возможность получить несмещенную оценку для дисперсии.

При сравнительно большом количестве измерений, т.е. при значениях  $n \gg 1$ , дисперсия достаточно точно характеризует разброс измеряемой величины. Квадратный корень из дисперсии  $\sigma = \sqrt{D}$  называется стандартным отклонением. **Стандартное отклонение  $\sigma$**  характеризует среднюю погрешность отдельных измерений величины  $m_i$  поскольку оно указывает вероятность обнаружения наблюдаемых значений этой величины в интервале значений от  $m_{cp.} - \sigma$  до  $m_{cp.} + \sigma$ . При  $n \gg 1$ , в указанном интервале оказывается около 70% измерений. Вероятность того, что измеряемая величина отличается от среднего значения не более, чем на  $\pm 3\sigma$ , будет равна почти 100% (точнее 99,7%). При обработке результатов эксперимента часто используется **«правило  $3\sigma$ »**, или правило «трех стандартов», которое основано на указанном свойстве распределения. С учетом проведенного выше анализа можно установить наличие промаха в результате отдельного измерения, а значит, отбросить его, если результат измерения более чем на  $3\sigma$  отличается от измеренного среднего значения случайной величины.

**Еще раз отметим, что в любой конечной серии измерений нельзя определить точно ни истинное среднее значение  $m_{cp.}$ , ни истинную дисперсию  $\sigma$ , ни другие моменты функции распределения случайной величины. В реальном эксперименте всегда имеют дело с конечной выборкой (из генеральной совокупности) — конечным числом значений случайной величины. Поэтому возможно получить только оценки неизвестных параметров и их погрешности, которые в свою очередь являются случайными величинами.**

#### **4. Распределение Пуассона.**

Используя полученное выше выражение (9) для того, что атом не распадается за конечное время  $t$ , а также то, что сумма вероятностей распада и «нераспада» равна 1, перепишем распределение (13) в следующем виде:

$$P_m = \frac{N!}{(m!)(N-m)!} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^m \cdot e^{-(N-m)\lambda t} \quad (15)$$

Так как  $N > m$ , то  $N! = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot \dots \cdot (N-m+1) \cdot (N-m)!$  [14].

Точнее,  $N \gg m$ , так как число регистрируемых распадов  $m$  несравненно меньше полного числа радиоактивных ядер  $N$ .

Если вынести  $N$  из всех скобок от  $(N-1)$  до  $(N-m+1)$  и учесть, что  $N$  очень велико, то выражение (15) примет вид:

$$P_m = \frac{N^m}{m!} \cdot (1 - e^{-\lambda t})^m \cdot e^{-(N-m)\lambda t} \quad (16) [15].$$

Отметим, что величина  $\lambda t$  очень мала. Действительно  $\lambda t \ll 1$ , так как  $\lambda = \ln 2 / T$ , а время измерения  $t$  несравненно меньше периода полураспада исследуемого изотопа.

Выражение (16) преобразуется к следующему виду:

$$P_m = \frac{N^m}{m!} \cdot (e^{\lambda t} - 1)^m \cdot e^{-N\lambda t} \quad (17) [16].$$

Используя малость величины  $\lambda t$  и разлагая экспоненту в скобках в ряд с удержанием первых слагаемых, получим:

$$P_m = \frac{N^m}{m!} \cdot (\lambda t)^m \cdot e^{-N\lambda t} = P_m = \frac{(N\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-N\lambda t} \quad (18)$$

Покажем, что величина  $N\lambda t$  есть фактически математическое ожидание  $\mu$  измеряемых в эксперименте величин  $m_i$ . Из закона (1) радиоактивного распада следует, что  $\Delta N = N\lambda t$ . Фактически  $\Delta N$  есть число зарегистрированных в каждом эксперименте актов распада ядер радиоактивного источника, т.е. величина  $N\lambda t = \mu = m_{cp}$  для достаточно большого количества измерений.

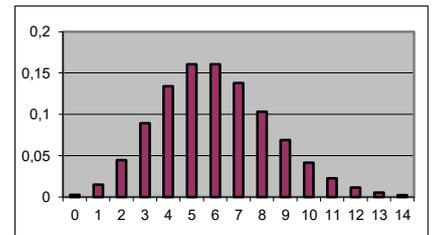
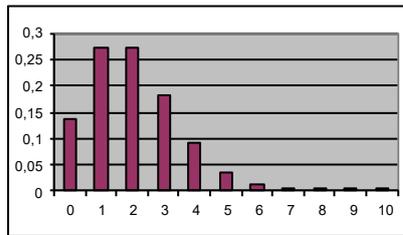
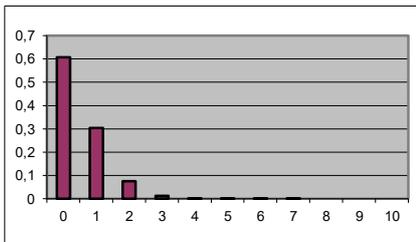
Итак, биномиальное распределение Бернулли при сделанных выше предположениях переходит в распределение Пуассона (Пуассон Симеон Дени – французский математик, механик и физик, 1781 г. – 1840 г.):

$$P_m = \frac{(\mu)^m}{m!} \cdot e^{-\mu} \quad (19)$$

**Величина  $P_m$  рассчитывается для каждого  $m = m_i$  при  $\mu = m_{cp}$  из данного количества измерений для выборки конечного объема числа значений случайной величины.**

Это распределение имеет вид, подобный вариантам, примерные графики которых представлены ниже.

Распределения Пуассона (зависимость  $P_m$  от  $m$ ) для  $m_{cp} = 0,5$ ,  $m_{cp} = 2$  и  $m_{cp} = 6$ .



Очевидно, что сумма всех вероятностей  $P_m$  для генеральной совокупности значений  $m_i$  равна единице, как вероятность достоверного события, т.е.

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu)^m}{m!} \cdot e^{-\mu} = 1 \quad (20) [17].$$

Из приведенных графиков видно, что с увеличением среднего значения числа регистрируемых частиц распределение Пуассона делается более симметричным относительно наиболее вероятного  $m_{cp} = \mu$  и дискретная природа величины  $m$  в распределении Пуассона становится менее существенна. Практически при  $m_{cp} \geq 20$  имеет место полная симметрия. С увеличением  $m_{cp}$  растет и величина дисперсии  $D$  и величина стандартного отклонения  $\sigma$ , но относительная точность измерений  $\Delta m_{cp} / m_{cp}$  при этом возрастает. Для очень больших значений  $m_{cp}$  дискретное распределение Пуассона переходит в симметричное относительно среднего непрерывное распределение Гаусса, где  $m$  уже непрерывная переменная величина, которая может быть и положительной и отрицательной:

$$P_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot \exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\mu}\right) \quad (21)$$

Конечно, распределение Гаусса также нормировано на единицу.

Используя распределение Пуассона (19), легко показать, что  $m_{cp.}$ , равное по определению

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot P_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{(\mu)^m}{m!} \cdot e^{-\mu}, \text{ для генеральной совокупности величин } m, \text{ равно } \mu, \text{ т.е.}$$

$$m_{cp.} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \approx \mu \text{ для достаточно больших } n \text{ [18].}$$

### **5. Дисперсия и стандартное отклонение в распределении Пуассона.**

По определению дисперсии:

$$D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta m_i)^2 \quad (\text{или } D = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta m_i)^2), \text{ где } \Delta m_i = m_i - m_{cp.}, \text{ а } n - \text{ достаточно большое}$$

число измерений случайных величин отсчетов  $m_i$ . Имеем  $D = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (m_i - m_{cp.})^2 = (m_i^2)_{cp.} - m_{cp.}^2$  [19].

Величину  $(m_i^2)_{cp.}$  можно вычислить, используя распределение Пуассона. Предельное значение  $(m_i^2)_{cp.}$  определится в соответствии с определением математического ожидания этой

величины:  $(m_i^2)_{cp.} \approx \sum_{i=1}^n (m_i^2 \cdot p_m)$  и т.д. Поскольку вычисление дисперсии сравнительно

громоздко, приведем результат. Дисперсия генеральной совокупности целочисленных случайных величин, соответствующих распределению Пуассона, есть  $D = \mu$ , а для выборки достаточно большого объема дисперсия  $D \approx m_{cp.}$ .

Квадратный корень из дисперсии называют среднеквадратичным или стандартным отклонением:  $\sigma = \sqrt{D}$ . Соответственно:  $\sigma = \sqrt{\mu}$  или  $\sigma \approx \sqrt{m_{cp.}}$ . Результат измерения  $m_{cp.}$  обычно

представляют в виде:  $m_{cp.} \pm \sigma = m_{cp.} \pm \sqrt{m_{cp.}}$ . Относительная ошибка  $\delta$  измерения  $m_{cp.}$  равна при этом:  $\delta = \sigma/m_{cp.} = 1/\sqrt{m_{cp.}}$ .

Относительная ошибка непосредственно определяет статистическую точность измерений. Из определения относительной ошибки видно, что точность измерения довольно медленно растёт с увеличением величин  $m_i$  и, соответственно,  $m_{cp.}$  т.е. фактически с увеличением длительности измерения или активности измеряемого радиоактивного источника. Так, для увеличения точности в 10 раз приходится увеличивать в 100 раз либо время измерения, либо количество радиоактивного препарата.

Подтверждение приведенных выше теоретических положений по распределению Пуассона и является целью эксперимента в данной лабораторной работе.

## **Глава 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ**

### **1. Счетчик Гейгера-Мюллера (подробнее см. инстр. к лаб. раб. №1).**

Счетчик Гейгера-Мюллера представляет собой цилиндрический конденсатор (обычно тонкостенная металлическая трубка), наполненный газом при давлении порядка 100 мм рт. ст. Одним электродом (анод) служит металлическая нить, закрепленная по оси цилиндра, а другим (катод) – металл трубки или проводящий слой, нанесенный на внутреннюю поверхность трубки.

В зависимости от диаметров катода и нити, а также от природы газового заполнения счетчики работают при разности потенциалов между электродами от десятков до тысяч вольт. Поскольку газ в трубке является диэлектриком, при напряжении, недостаточном для его пробоя, и в отсутствие радиоактивного излучения тока в цепи счетчика нет.

Возникающая под действием на счетчик ионизирующего излучения частица (обычно это электрон, выбитый излучением радиоактивного источника или частицами и квантами естественного фона из металла трубки) движется в пространстве между электродами счетчика и вызывает ионизацию атомов газа. Образовавшиеся электроны и ионы под действием электрического поля устремляются к электродам. В цепи счетчика возникает кратковременный импульс тока.

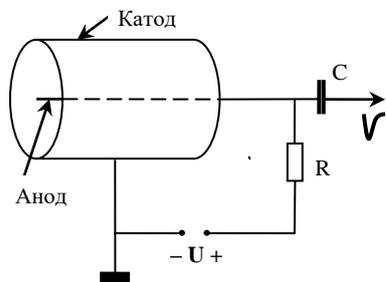


Схема включения счетчика Гейгера-Мюллера обычно имеет вид, представленный на рис. Выходной сигнал представляет собой падение напряжения на сопротивлении  $R$ , создаваемое импульсом ионизационного тока. Конденсатор  $C$  служит для отделения постоянного высокого напряжения  $U$  от дальнейших электрических цепей измерительной аппаратуры. В данной лабораторной работе импульс детектора после конденсатора поступает на предварительный усилитель сигнала и далее на счетчик импульсов (пересчетный прибор).

## 2. Порядок выполнения работы

1. Включить сетевыми тумблерами блок питания счетчика Гейгера-Мюллера ТИП-ВСМ и пересчетный прибор ПП.-15. В пересчетном приборе работает «Вход X», (**в правом нижнем ряду черных кнопок должны быть нажаты 2-я слева кнопка** (импульсы отрицательной полярности) **и 2-я справа кнопка** (соответственно амплитуде входных импульсов)). После прогрева приборов в течение нескольких минут на пересчетке, при нажатой кнопке «Пуск», можно наблюдать подсчет импульсов регистрации излучения естественного фона. Установить на пересчете время экспозиции 10 с ( $10^1$ ) – автоматическая остановка счета через 10 с после нажатия кнопки «Пуск». Результаты очередного счета обнуляются кнопкой «Сброс».

2. Произвести 100 шт. (при желании можно больше) измерений числа отсчетов импульсов, регистрируемых пересчеткой за указанное время экспозиции, при облучении счетчика **естественным фоном** (радиоактивные источники должны быть удалены).

Представить в отчете по лаб. раб. таблицу измерений и график (только точками, а не прямоугольниками), аналогичный одному из графиков распределения Пуассона, приведенным выше в тексте инструкции, зависимости числа так называемых интервалов или количества измерений  $P_{m \text{ экспер(фон)}}$  от числа отсчетов  $m_i$  частиц на интервале.

3. Получить у преподавателя радиоактивный источник и, используя подручные средства, подобрать его расположение и расстояние от счетчика таким образом, чтобы число отсчетов за установленное время экспозиции было примерно в среднем на порядок большим, чем число отсчетов при фоновом облучении (достаточно нескольких проб).

4. Произвести 100 шт. измерений числа отсчетов импульсов, регистрируемых пересчеткой за указанное время экспозиции, при облучении счетчика **радиоактивным источником**.

Представить в отчете по лаб. раб. таблицу измерений и график (только точками, а не прямоугольниками), аналогичный одному из графиков распределения Пуассона, приведенным выше в тексте инструкции, зависимости числа так называемых интервалов или количества измерений  $P_{m \text{ экспер(источн)}}$  от числа отсчетов  $m_i$  частиц на интервале.

5. Таким образом, получены два экспериментальных распределения для вероятностных процессов регистрации радиоактивных излучений с «малой» и «большой» (отличающейся на порядок) статистикой.

6. Подтвердить расчетом примерное соответствие полученных экспериментальных распределений распределению Пуассона не менее, чем в 5 разных точках каждого графика (аргументы центра, левого и правого крыла графиков, точки для расчета может указать и преподаватель), вычислив  $P_{m \text{ теор.(фон)}}$  и  $P_{m \text{ теор.(источн)}}$  для этих аргументов. Расчетные точки отметить крестиками или другим цветом.

Напомним, что величина  $P_m$  рассчитывается для каждого  $m = m_i$  при  $\mu = m_{cp}$  из данного количества измерений для выборки конечного объема числа значений случайной величины.

## 7. Радиоактивный источник сдать преподавателю.